

29 avril 2025

---

**Les règles du jeu :**

1. Vous pouvez utiliser tout résultat du cours... sauf si la question est de démontrer le résultat lui-même.
  2. Les documents ne sont pas autorisés.
  3. Détaillez vos réponses copieusement, rédigez-les soigneusement. Justifiez tout.
  4. Si vous avez des questions sur quoi que ce soit, posez-les sans perdre de temps.
  5. Vous avez 3 exercices et 2 heures. Bon travail...
- 

**Exercice 1 (Révisions de cours)**

1. Donner un exemple de morphisme bijectif qui n'est pas un plongement.
2. Soit  $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$  le langage des groupes (additivement écrit). Montrer que  $\text{Th}(\mathbb{Q}, +, -, 0)$  n'élimine pas les quantificateurs.
3. Soient  $\mathcal{L}$  un langage,  $\mathcal{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure et  $A \subset M$ . Montrer qu'un type  $p(\bar{x}) \in S_n(A)$  est complet si et seulement si pour toute formule  $\phi(\bar{x})$ , soit  $\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$  soit  $\neg\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ . (*Rappel : un  $n$ -type sur  $A$  est un ensemble maximal (par rapport à l'inclusion) de formules à paramètres dans  $A$  en variables libres  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  dont toute partie finie a une réalisation dans  $M$ .*)
4. Soient  $\mathcal{L} = \{<\}$  le langage avec un symbole de relation binaire et  $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ , les rationnels munis de son ordre usuel vus comme une  $\mathcal{L}$ -structure. Maintenant, si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $(q_i)_{i < \omega}$  et  $(q'_i)_{i < \omega}$  sont deux suites ascendantes et descendantes respectivement qui convergent vers  $\alpha$ , alors montrer que l'ensemble de formules à paramètres  $\{q_i < x, x < q'_i \mid i < \omega\}$  est contenu dans un type et un seul et qu'il existe une extension élémentaire de  $(\mathbb{Q}, <)$  dans laquelle ce type a une infinité de réalisations. (*Indication : Pour l'unicité du type vous pouvez faire un va-et-vient entre deux expansions convenables de  $\mathcal{Q}$ .*)

**Exercice 2** Soit le langage  $\mathcal{L} = \{P_i, Q_i \mid i < \omega\}$  où les  $P_i$  et les  $Q_i$  sont des relations unaires. Soit  $T$  la théorie dans ce langage axiomatisée par les énoncés suivants : les  $P_i$  sont deux à deux disjoints, les  $Q_i$  sont également deux à deux disjoints et pour tout  $i, j$  l'intersection  $P_i \cap Q_j$  est infinie.

1. Écrire les axiomes de  $T$  au premier ordre.
2. Donner un exemple de modèle dénombrable de  $T$ .
3. Montrer qu'un modèle  $\aleph_0$ -saturé de  $T$  a les propriétés suivantes :
  - pour chaque  $i < \omega$ , il existe une infinité d'éléments qui satisfont  $P_i$  mais aucun des  $Q_j$  ;
  - pour chaque  $j < \omega$ , il existe une infinité d'éléments qui satisfont  $Q_j$  mais aucun des  $P_i$  ;
  - il existe une infinité d'éléments qui ne sont dans aucun  $P_i$  et dans aucun  $Q_j$ .
4. Soient  $(a_1, \dots, a_k)$  et  $(b_1, \dots, b_k)$  deux  $k$ -uplets non vides extraits de deux modèles  $\aleph_0$ -saturés de  $T$ . Expliciter, en justifiant votre réponse, des conditions suffisantes pour que  $(a_1, \dots, a_k)$  et  $(b_1, \dots, b_k)$  aient même type.
5. Dédurre du point précédent que  $T$  élimine les quantificateurs et qu'elle est complète.
6. Quels sont les 1-types sur  $\emptyset$  de  $T$  ?
7. Montrer qu'à isomorphisme près  $T$  a au moins  $2^{\aleph_0}$  modèles dénombrables.

**Exercice 3 (Svenonius)** Cet exercice a pour but de démontrer la moitié suivante du théorème dit de Svenonius :

Soient  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre,  $\mathcal{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure d'ensemble sous-jacent  $M$ ,  $A \subset M$  et  $D$  une partie définissable de  $M^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Si

(\*) pour toute extension élémentaire  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$ , pour tout automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{N}$  fixant  $A$  point par point et pour tout  $\bar{x} \in N^n$  (l'ensemble sous-jacent de  $\mathcal{N}$ ),  $\mathcal{N} \models D(\bar{x})$  si et seulement si  $\mathcal{N} \models D(\sigma(\bar{x}))$ ,

alors  $D$  est définissable par une formule à paramètres dans  $A$ .

Dans l'énoncé, on a noté  $D$  la formule définissant l'ensemble  $D$ . On gardera la même notation.

1. Montrer que la condition (\*) équivaut à

(\*\*) Pour toute extension élémentaire  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$  et toute paire d'éléments  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in N^n$  tels que  $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{\alpha}/A) = \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{\beta}/A)$ ,  $\mathcal{N} \models D(\bar{\alpha})$  si et seulement si  $\mathcal{N} \models D(\bar{\beta})$ .

2. On fixe une extension élémentaire  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$  et  $\bar{\alpha} \in N^n$  tel que  $\mathcal{N} \models D(\bar{\alpha})$ . On notera  $\mathcal{L}^+$  le langage obtenu en ajoutant à  $\mathcal{L}$   $n$  symboles de constantes  $c_1, \dots, c_n$  et un symbole de constante pour chaque élément de  $M$ . On pose  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ . Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :

$$\text{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{ \phi(\bar{c}) \mid \phi \in \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{\alpha}/A) \} \cup \{ \neg D(\bar{c}) \} .$$

En déduire l'existence d'une formule  $D_{\bar{\alpha}}$  dans  $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{\alpha}/A)$  telle que dans toute extension élémentaire de  $\mathcal{M}$ , l'énoncé  $\forall \bar{x} (D_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \rightarrow D(\bar{x}))$  soit vrai.

3. Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de  $\mathcal{M}$  et tous les  $n$ -uplets de celles-ci qui satisfont  $D$ . Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule  $D_{\infty}$  à paramètres dans  $A$  telle que dans toute extension élémentaire de  $\mathcal{M}$ , l'énoncé  $\forall \bar{x} (D_{\infty}(\bar{x}) \leftrightarrow D(\bar{x}))$  soit vrai.