29 avril 2025

Les règles du jeu :

1. Vous pouvez utiliser tout résultat du cours... sauf si la question est de démontrer le résultat lui-même.

2. Les documents ne sont pas autorisés.

3. Détaillez vos réponses copieusement, rédigez-les soigneusement. Justifiez tout.

4. Si vous avez des questions sur quoi que ce soit, posez-les sans perdre de temps.

5. Vous avez 3 exercices et 2 heures. Bon travail...

Exercice 1 (Révisions de cours)

1. *Donner un exemple de morphisme bijectif qui n'est pas un plongement.*

   Réponse : On considère dans le langage $\{<, P\}$ avec un symbole de ralation binaire $<$ et un symbole de relation unaire P, la structure $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <, \mathbb{Z}_+)$, les entiers relatifs munis de l'ordre usuel et ceux positifs formant l'interprétation de P. L'application de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$ est une bijection qui est aussi un morphisme de $\mathcal{Z}$ puisque si $\mathcal{Z} \models P(x)$ alors $\mathcal{Z} \models P(x+1)$. Or, $\mathcal{Z} \models P(0)$ mais $\mathcal{Z} \not\models P(-1)$.

2. *Soit $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ le langage des groupes (additivement écrit). Montrer que Th$(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ n'élimine pas les quantificateurs.*

   Réponse : Dans le langage donné, $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, -0)$ qui est un sous-groupe, est une sous-structure de $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$. Or $\mathcal{Z} \not\preceq \mathcal{Q}$. Par exemple, $\mathcal{Z} \not\models \exists x(x+x=2)$ tandis que $\mathcal{Q} \models \exists x(x+x=2)$. Or, nous avons vu en cours que toute sous-structure d'un modèle d'une théorie qui élimine les quantificateurs est une sous-structure élémentaire.

3. *Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subset M$. Montrer qu'un type $p(\overline{x}) \in S_n(A)$ est complet si et seulement si pour toute formule $\varphi(\overline{x})$, soit $\varphi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ soit $\neg\varphi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$. (Rappel : un n-type sur A est un ensemble <u>maximal</u> (par rapport à l'inclusion) de formules à paramètres dans A en variables libres $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ dont toute partie finie a une réalisation dans M).*

   Réponse : La suffisance de la conditon étant évidente, nous en montrons la nécessité. Admettons par l'absurde qu'il existe une formule $\varphi(\overline{x})$ telle que ni $\varphi(\overline{x})$ ni $\neg\varphi(\overline{x})$ n'appartienne à $p(\overline{x})$. Comme p est maximal, il existe deux parties finies $p_0(\overline{x})$ et $p_1(\overline{x})$ telles que $p_0(\overline{x}) \cup \{\varphi(\overline{x})\}$ et $p_1(\overline{x}) \cup \{\neg\varphi(\overline{x})\}$ ne sont pas réalisés dans $\mathcal{M}$. Or, comme $p_0(\overline{x}) \cup p_1(\overline{x})$ est une partie finie de $p(\overline{x})$, il existe $\overline{c} \in M^n$ qui réalise à la fois $p_0(\overline{x})$ et $p_1(\overline{x})$. Par conséquent $\mathcal{M} \models \neg\varphi(\overline{c})$ et $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{c})$, absurde.

4. *Soient $\mathcal{L} = \{<\}$ le langage avec un symbole de relation binaire et $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$, les rationnels munis de son ordre usuel vus comme une $\mathcal{L}$-structure. Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(q_i)_{i<\omega}$ et $(q'_i)_{i<\omega}$ sont deux suites ascendantes et descendantes respectivement qui convergent vers α, alors montrer que l'ensemble de formules à paramètres $\{q_i < x \ , \ x < q'_i \mid i < \omega\}$ est contenu dans un type et un seul et qu'il existe une extension élémentaire de $(\mathbb{Q}, <)$ dans laquelle ce type a une infinité de réalisations. (Indication : Pour l'unicité du type vous pouvez faire un va-et-vient entre deux expansions convenables de $\mathcal{Q}$.)*

   Réponse : Notons $I(x) = \{q_i < x \ , \ x < q'_i \mid i < \omega\}$. Pour montrer que I est contenu dans un type il suffit de montrer que chaque partie finie de I a une réalisation dans $\mathcal{Q}$. Si I_0 est une telle partie de I, alors I_0 est de la forme $\{q_{i_1} < x \ , \ldots, \ q_{i_m} < x, \ x < q_{j_1}, \ \ldots, \ x < q_{j_n}\}$ pour une paire de naturels m et n. Pour réaliser I dans $\mathbb{Q}$ il suffit de choisir une valeur de x sur l'intervalle $]\max(q_{i_1}, \ldots, q_{i_m}), \min(q_{j_1}, \ldots, q_{j_n})[\cap \mathbb{Q}$.

Le paragraphe précédent montre que I est contenu dans un type. Pour son unicité il suffit de montrer que deux réalisations de I ont même type sur l'ensemble de paramètres $A = \{q_i, q'_i \mid i < \omega\}$. Soient maintenant α_1 et α_2 deux réalisations de I. On peut admettre qu'elles appartiennent à une même extension élémentaire $\mathcal{R}$ de $\mathcal{Q}$ grâce au théorème d'extension élémentaire commune. Nous en noterons R l'ensemble sous-jacent. Nous montrerons que $(R, \alpha_1, q_i, q'_i\ (i \in \omega)) \equiv (R, \alpha_2, q_i, q'_i\ (i \in \omega))$. Ceci suffira pour conclure que $\mathrm{tp}(\alpha_1/A) = \mathrm{tp}(\alpha_2/A)$.

Pour ce faire on effectue un va-et-vient entre ces deux expansions de $\mathcal{R}$. On étudie les isomorphismes partiels entre les sous-structures de type fini. La famille de tels isomorphismes n'est pas vide puisque $q_i \mapsto q_i$, $q'_i \mapsto q'_i$ et $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$ définissent un isomorphisme partiel entre les sous-structures $\{q_i, q'_i, \alpha_1 |\ i < \omega\}$ et $\{q_i, q'_i, \alpha_2 |\ i < \omega\}$ en raison des formules de I que à la fois α_1 et α_2 satisfont.

Admettons que $(a_1, \ldots, a_m)$ et $(b_1, \ldots, b_m)$ soient deux m-uplets de R qui engendrent deux sous-structures isomorphes de $(R, \alpha_1, q_i, q_i\ (i \in \omega))$ et $(R, \alpha_2, q_i, q'_i\ (i \in \omega))$ respectivement par la correspondance $a_i \mapsto b_i, (1 \leq i \leq m)$. Alors, les places de chaque a_i et b_i par rapport aux $\{q_i, q'_i, \alpha_1 |\ i < \omega\}$ et $\{q_i, q'_i, \alpha_2 |\ i < \omega\}$ respectivement se correspondent. Si maintenant on choisit $a_{m+1} \in R$, en utilisant la densité sans extrémités de $\mathcal{R}$ on peut trouver un $b_{m+1} \in R$ qui lui correpondra dans $(R, \alpha_2, q_i, q'_i)\ (i \in \omega))$. Le vient se fait de manière symétrique. La famille d'isomorphismes partiels est donc karpienne.

Pour la dernière partie de la question sur un ensemble infini de réalisations du type déterminé par I, on ajoute au langage $\mathcal{L}$ les symboles de constantes $\{c_i | i \in \omega\}$ ainsi qu'un symbole de constante pour chaque élément de $\mathbb{Q}$. On montre ensuite que l'ensemble d'énoncés suivant dans ce langage est finiment consistant :

$$\mathrm{Th}(\mathcal{Q}, \mathbb{Q})\ \cup\ \{q_i < c_j, c_j < q'_i | i, j \in \omega\}\ \cup\ \{c_k < c_l | k < l\}$$

Par compacité, une extension élémentaire de $\mathcal{Q}$ est modèle de cet ensemble dénoncés et dans cette extension le type déterminé par I a une infinité de réalisations.

Exercice 2 Soit le langage $\mathcal{L} = \{P_i, Q_i \mid i < \omega\}$ où les P_i et les Q_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans ce langage axiomatisée par les énoncés suivants : les P_i sont deux à deux disjoints, les Q_i sont également deux à deux disjoints et pour tout i, j l'intersection $P_i \cap Q_j$ est infinie.

1. *Écrire les axiomes de T au premier ordre.*

   Réponse :
$$(i \neq j < \omega) \quad \neg \exists x (P_i(x) \wedge P_j(x))$$
$$(i \neq j < \omega) \quad \neg \exists x (Q_i(x) \wedge Q_j(x))$$
$$(i, j, k \in \omega) \quad \exists x_0 \ldots x_k \left(\bigwedge_{0 \leq a \neq b \leq k} x_a \neq x_b \ \wedge\ \bigwedge_{a=0}^{k} P_i(x_a) \wedge Q_j(x_a) \right)$$

2. *Donner un exemple de modèle dénombrable de T.*

   Réponse : L'ensemble sous-jacent de notre modèle $\mathcal{M}$ est $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ensuite on considère une partition de $\mathbb{N}$ en une infinité de sous-ensembles tous infinis : par exemple on définit A_0 comme l'ensemble des nombres naturels qui ont au moins deux diviseurs premiers distincts, et pour $i \in \mathbb{N}^*$, on définit A_i comme les puissances du ième nombre premier. Dans ce contexte, $P_i^{\mathcal{M}} = \{i\} \times \mathbb{N}$ et $Q_j^{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times P_j$.

3. *Montrer qu'un modèle $\aleph_0$-saturé de T a les propriétés suivantes :*
   - *pour chaque $i < \omega$, il existe une infinité d'éléments qui satisfont P_i mais aucun des Q_j ;*
   - *pour chaque $j < \omega$, il existe une infinité d'éléments qui satisfont Q_j mais aucun des P_i ;*
   - *il existe une infinité d'éléments qui ne sont dans aucun P_i et dans aucun Q_j.*

Réponse : Soit $\mathcal{M}$ un modèle $\aleph_0$-saturé de T. On fixe $i < \omega$ et on pose $p_0^i(x) = \{P_i(x), \neg Q_j(x) | j < \omega\}$. Toute partie finie de p_0^i se réalise dans $\mathcal{M}$. Alors, $p_0^i(x)$ se réalise dans $\mathcal{M}$ car c'est un ensemble de formules sans paramètres. Soit α_0 une telle réalisation dans $\mathcal{M}$. Alors α_0 appartient à P_i mais à aucun Q_j. Maintenant, par récurrence, admettons $p_0(x), \ldots, p_m(x)$ construits avec les réalisations respectives $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$. On définit $p_{m+1}^i(x) = p_m^i(x) \cup \{\bigwedge_{l=0}^m x \neq \alpha_l\}$. Toute partie finie de $p_{m+1}(x)$ est réalisée dans $\mathcal{M}$ puisque T dit que $P_i \cap Q_j$ est un ensemble infini pour tout $j < \omega$. Comme de plus $p_{m+1}^i(x)$ n'utilise qu'un nombre fini de paramètres, il est réalisé dans $\mathcal{M}$. La suite de $p_m^i(x)$ ainsi construite fournit une infinité d'éléments de M satisfaisant la première condition. Un raisonnement symétrique commençant avec $q_0^j(x) = \{\neg P_i(x), Q_j(x) | i < \omega\}$ montre comment on construit une infinité d'éléments satisfaisant la deuxième condition.

Finalement, pour la troisième condition on commence avec $r_0(x) = \{\neg P_i(x), \neg Q_j(x) | i, j < \omega\}$ et on ajoute à chaque étape comme ci-dessus les réalisations précédentes comme paramètres pour les éviter.

4. *Soient $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ deux k-uplets non vides extraits de deux modèles $\aleph_0$-saturés de T. Expliciter, en justifiant votre réponse, des conditions suffisantes pour que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ aient même type.*

Réponse : Soient $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ comme dans l'énoncé extraits de deux modèles $\aleph_0$-saturés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. Admettons que pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$,

(a) pour tout $m \in \omega$, $\mathcal{M} \models P_m(a_i)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models P_m(b_i)$;

(b) pour tout $m \in \omega$, $\mathcal{M} \models Q_m(a_i)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models Q_m(b_i)$;

(c) pour tous $m, n \in \{1, \ldots, k\}$, $a_m = a_n$ si et seulement si $b_m = b_n$.

Bien sûr, si $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(b_1, \ldots, b_k)$ alors ces conditions sont satisfaites. Nous montrerons l'implication inverse. Pour ce faire il suffit de faire un va-et-vient en utilisant les isomorphismes partiels entre les sous-structures finies (équivalemment, de type fini) de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ contenant $\{a_1, \ldots, a_k\}$ et $\{b_1, \ldots, b_k\}$ respectivement. Nous remarquons aussi que l'association $\sigma : a_i \mapsto b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ est un isomorphisme partiel.

Soient maintenant $a \in M$. Montrons qu'il existe un isomorphisme partiel τ dont le domaine contient a et qui prolonge σ. Si $a \in \{a_1, \ldots, a_k\}$ alors $\tau = \sigma$. Sinon pour a il y a quatre possibilités :

(i) il existe $i, j < \omega$ tels que a réalise $\{P_i(x), Q_j(x)\}$;

(ii) il existe $i < \omega$ tel que a réalise $\{P_i(x), \neg Q_j(x) | j < \omega\}$;

(iii) il existe $j < \omega$ tel que a réalise $\{\neg P_i(x), Q_j(x)\}$;

(iv) a réalise $\{\neg P_i(x), \neg Q_j(x) | i, j < \omega\}$.

Pour chaque cas, on peut trouver un $b \in N$, qui satisfait les mêmes conditions puisque $\mathcal{N}$ est un modèle $\aleph_0$-saturé et que selon le point précédent et les axiomes de T donnés dans l'énoncé, chaque $P_i^{\mathcal{N}}$ et $Q_j^{\mathcal{N}}$ est infini. On définit $\tau(a) = b$. Ceci constitue le va. Le vient est symétrique.

En général, pour deux sous-structures finies A et B contenant $\{a_1, \ldots, a_k\}$ et $\{b_1, \ldots, b_k\}$ respectivement et entre lesquels il existe un isomorphisme partiel, on fait le même raisonnement. Par un résultat de cours, on conclut que $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(b_1, \ldots, b_k)$.

5. *Déduire du point précédent que T élimine les quantificateurs et qu'elle est complète.*

Réponse : La conclusion du point précédent montre que pour tout $k < \omega$ non nul deux k-uplets ont même type dès qu'ils satisfont les formules sans quantificateurs. Par un théorème de cours, toute formule à k variables exactement équivaut modulo T à une combinaison booléenne de formules sans quantificateurs. En d'autres termes, T élimine les quantificateurs.

En ce qui concerne la complétude, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles $\aleph_0$-saturés de T, on peut refaire le raisonnement du point 4 en utilisant les isomorphismes partiels entre les sous-structures finies de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$. Il en découle que ces deux modèles sont ∞-équivalents, et par conséquent élémentairement équivalents. Si maintenant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles arbitraires, ils ont chacun une extension élémentaire $\aleph_0$-saturée. Ces dernières sont élémentairement équivalentes par le raisonnement précédent. Alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ par la transitivité de l'équivalence élémentaire. Donc, tous les modèles de T sont élémentairement équivalents, en d'autres termes T est complète.

6. *Quels sont les 1-types sur $\emptyset$ de T ?*

   Réponse : Les quatre conditions (i)-(iv) du point 4. de l'exercice déterminent quatre type différents sur $\emptyset$. Ce sont les éléments de $S_1(T)$.

7. *Montrer qu'à isomorphisme près T a au moins $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables.*

   Réponse : On commence avec le modèle du point 2. de l'exercice. Appelons-le $\mathcal{M}_0$. Soit $(n_i)_{i<\omega}$ une suite de nombre naturels. Pour chaque $i\omega$, on ajoute à M_0 les points $\{(i,-j) | 1 \leq j \leq n_i\}$ si $n_i > 0$ et on ne fait rien si $n_i = 0$. Ensuite, on déclare que pour chaque $i < \omega$, satisfont P_i et ne satisfont aucun des Q_j. Pour deux suites distinctes on obtient par conséquent deux modèles non isomorphes. Ceci montre qu'il existe au moins $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables de T.

Exercice 3 (Svenonius) Cet exercice a pour but de démontrer la moitié suivante du théorème dit de Svenonius :

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'ensemble sous-jacent M, $A \subset M$ et D une partie définissable de M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Si

(*) *pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, pour tout automorphisme σ de $\mathcal{N}$ fixant A point par point et pour tout $\overline{x} \in N^n$ (l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{N}$), $\mathcal{N} \models D(\overline{x})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\sigma(\overline{x}))$,*

alors D est définissable par une formule à paramètres dans A.

Dans l'énoncé, on a noté D la formule définissant l'ensemble D. On gardera la même notation.

1. *Montrer que la condition* **(*)** *équivaut à*

(**) *Pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et toute paire d'éléments $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in N^n$ tels que $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\beta}/A)$, $\mathcal{N} \models D(\overline{\alpha})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\overline{\beta})$.*

Réponse : D'abord nous admettons la condition (*) et nous démontrons (**). Si $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont comme dans l'énoncé de (**) alors par un théorème de cours il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ et un automorphisme σ de $\mathcal{N}'$ tel que $\sigma(\overline{\alpha}) = \overline{\beta}$ en fixant point par point A. Par conséquent, pour toute formule, $D(\overline{x})$ $\mathcal{N}' \models D(\overline{\alpha})$ si et seulement si $\mathcal{N}' \models D(\overline{\beta})$. Comme $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}'$ et que $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont extraits de $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \models D(\overline{\alpha})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\overline{\beta})$.

Admettons maintenant (**). Soient $\mathcal{N}$ et σ comme dans l'énoncé de (*). Alors comme pour tout automorphisme digne de ce nom, σ préserve le type des n-ıplets : un n-uplet extrait de $\mathcal{N}$ et son image sous σ ont le même type sur A.

2. *On fixe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\overline{\alpha} \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models D(\overline{\alpha})$. On notera $\mathcal{L}^+$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ n symboles de constantes $c_1, \ldots, c_n$ et un symbole de constante pour chaque élément de M. On pose $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_n)$. Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(\overline{c}) \mid \phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}/A)\ \} \cup \ \{\neg D(\overline{c})\} \ .$$

En déduire l'existence d'une formule $D_{\overline{\alpha}}$ dans $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}/A)$ telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall \overline{x}(D_{\overline{\alpha}}(\overline{x}) \to D(\overline{x}))$ soit vrai.

Réponse : L'ensemble $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(\overline{c}) \mid \phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}/A)\ \} \cup \ \{\neg D(\overline{c})\}$ est inconsistant parce que sinon, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{M}$ avec un certain α' extrait de cette extension $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}'}(\overline{\alpha}'/A)$ mais $\mathcal{N}' \not\models D(\overline{\alpha}')$. Grâce au théorème d'amalgamation des extensions élémentaires du cours, on peut supposer que $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}'$. Comme $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}'/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}'}(\overline{\alpha}'/A)$ et que $D(\overline{x}) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}'/A)$, on aboutit à une contradiction.

Par compacité et par le fait que $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ et $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}/A)$ soient clos par rapport aux conjonctions de formules, il existe $\theta(\overline{m}) \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$, $D_{\overline{\alpha}}(\overline{x}) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\overline{\alpha}/A)$ tels que $\theta(\overline{m}) \wedge D_{\overline{\alpha}}(\overline{c}) \wedge \neg D(\overline{c})$

soit inconsistant. Comme $\theta(\overline{m})$ appartient à une théorie, c'est un énoncé consistant. Par conséquent, $D_{\overline{\alpha}}(\overline{c}) \wedge \neg D(\overline{c})$ est inconsistant. Il en découle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall \overline{x}(D_{\overline{\alpha}}(\overline{x}) \to D(\overline{x}))$ est vrai. Notons que $D_{\overline{\alpha}}(\overline{x})$ est une formule à paramètres dans A.

3. *Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et tous les n-uplets de celles-ci qui satisfont D. Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule D_∞ à paramètres dans A telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall \overline{x}(D_\infty(\overline{x}) \leftrightarrow D(\overline{x}))$ soit vrai.*

Réponse : On énumère les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et les formules correspondantes obtenues comme dans le point précédent : $(\mathcal{M}_i, D_{\overline{\alpha}_i})_{i \in I}$. On garde le même langage $\mathcal{L}^+$ Alors l'ensemble

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\neg D_{\overline{\alpha}_i}(\overline{c}) \mid i \in I\} \ \cup \ \{D(\overline{c})\}$$

est inconsistant par le même type de raisonnement que dans le point précédent. Par compacité et par le fait que $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ soit clos par rapport aux conjonctions, il existe $\theta(\overline{m}) \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$, $\neg D_{\overline{\alpha}_1}(\overline{x}), \ldots, \neg D_{\overline{\alpha}_n}(\overline{x})$ tels que $\{\theta(\overline{m}), \neg D_{\overline{\alpha}_1}(\overline{c}), \ldots, \neg D_{\overline{\alpha}_n}(\overline{c}), D(\overline{c})\}$ soit inconsistant. Comme dans le point précédent on peut ignorer $\theta(\overline{m})$ et conclure que $\neg D_{\overline{\alpha}_1}(\overline{c}) \wedge \ldots \wedge \neg D_{\overline{\alpha}_n}(\overline{c}) \wedge D(\overline{c})$ soit inconsistant. On pose $D_\infty(\overline{x}) = D_{\overline{\alpha}_1}(\overline{x}) \vee \ldots \vee D_{\overline{\alpha}_n}(\overline{x})$. Alors, dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall \overline{x}(D(\overline{x}) \to D_\infty(\overline{x}))$ est vrai. Comme l'autre implication est assurée par le raisonnement du point précédent, on conclut que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'équivalence $\forall \overline{x}(D(\overline{x}) \to D_\infty(\overline{x}))$ est vraie. La formule $D_\infty(\overline{x})$ est la formule à paramètres dans A recherchée.