Équations différentielles - Cours no 2
Résultats Généraux sur les équations différentielles

1 Problème de Cauchy

Cadre : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E, f application $I \times \Omega \to E$ continue.
Problème de Cauchy : étant donnée $t_0 \in I$, $x_0 \in \Omega$, trouver $J \subset I$ intervalle contenant t_0 et une application $x\colon J \to \Omega$ dérivable sur J, satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(t, x(t)), \quad t \in J, \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

Notation : On note (J, x) une solution telle que ci-dessus.

Forme intégrale du problème de Cauchy: Un couple (J, x) est solution du Problème de Cauchy si, et seulement si, l'équation intégrale suivante est vérifiée :

$$\forall t \in J, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Terminologie : Le temps t_0 est le temps initial, la valeur x_0 est la donnée initiale du Problème de Cauchy.

Proposition 1 *Régularité de la solution : $x \in C^1(J)$ et $x \in C^{k+1}(J)$ si f de classe C^k.*

Définition 1
- Solution locale : (J, x) solution locale *si (J, x) solution et J voisinage de t_0 dans I ;*
- Prolongement de solution locale : *si (J, x) et $(\tilde{J}, \tilde{x})$ sont des solutions locales, on dit que $(\tilde{J}, \tilde{x})$* prolonge *(J, x) si $\tilde{J}$ contient J et x coincide avec $\tilde{x}$ sur J ; dans ce cas on dit aussi que (J, x) est* restriction *de $(\tilde{J}, \tilde{x})$;*
- Solution maximale : *une solution locale (J, x) est dite* maximale *si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle même ;*
- Solution globale : *une solution locale (J, x) est dite* globale *si elle est définie partout, i.e. si $I = J$.*

Remarque 1 *Pour alléger les preuves, on choisit de travailler avec un intervalle I ouvert ; on remarquera cependant qu'on pourrait faire la théorie en travaillant avec I intervalle quelconque contenant t_0 dans son intérieur. En particulier, les définitions données ci-dessus gardent alors leur sens.*

Recollement de solutions locales : Soit (J_i, x_i), $i \in \{1, 2\}$ deux solutions locales et S_1, S_2 deux sous segments de J_1 et J_2 respectivement qui s'intersectent en au moins un point :$S_i = [\sigma_i, \tau_i]$ avec $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \tau_1 \leq \tau_2$. On suppose $x_1(\tau_1) = x_2(\tau_2)$. En posant

$$\begin{cases} x(t) &=& x_1(t), \quad t \in S_1 = [\sigma_1, \tau_1], \\ x(t) &=& x_2(t), \quad t \in [\tau_1, \tau_2], \end{cases}$$

on obtient une solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Si t_0 est dans l'intérieur de S_1, c'est un prolongement de la solution locale (S_1, x_1).

Exemples : voir cours.

2 Résolution du Problème de Cauchy

Cadre : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E, f application continue $I \times \Omega \to E$.

Lemme 1 (Rappel) *Soit F, G des espaces de Banach et $U \subset F$ ouvert. Toute application $g \colon U \to G$ continue est localement bornée. Si $K \subset U$ est compact, alors il existe un voisinage de K sur lequel g est bornée.*

Preuve du Lemme 1: Soit $x_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0|_F < \eta$ implique $|f(x)_f(x_0)|_G < \varepsilon$. En particulier, f est bornée par $|f(x_0)|_G + \varepsilon$ sur le voisinage $B(x_0, \eta)$ de x_0. Si $K \subset U$ est compact, chaque point x de K a un voisinage V_x sur lequel f est bornée (disons par M_x). On recouvre K par un nombre fini V_{x_i}, $i = 1, \ldots, N$ des voisinages V_x. Alors $V = \cup_{i=1}^N V_{x_i}$ est un voisinage de K sur lequel f est bornée par $\max\limits_{1,\ldots,N} M_{x_i}$. ■

Dans la suite ce lemme sera appliqué à f, qui est supposée continue $I \times \Omega \to E$.

2.1 Définitions, rappels

2.1.1 Application localement lipchitzienne

Définition 2
- *Soit $A \subset I \times \Omega$. L'application f est dite* lipschitzienne *en la deuxième variable sur A si il existe $L \geq 0$ tel que : $\forall (t, x_1) \in A$, $\forall (t, x_2) \in A$,*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L |x_1 - x_2|_E; \tag{1}$$

- *L'application f est dite* localement lipschitzienne *en la deuxième variable si tout point de $I \times \Omega$ admet un voisinage A sur lequel f est lipschitzienne en la deuxième variable ;*

- *L'application f est dite* globalement lipschitzienne *en la deuxième variable si elle est lipschitzienne en la deuxième variable sur $I \times \Omega$.*

Proposition 2 *Si f est localement lipschitzienne en la deuxième variable, et $K \subset I \times \Omega$ est compact alors f est lipschitzienne en la deuxième variable sur un voisinage de K.*

2.1.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1 *Soit X un fermé d'un espace de Banach. Une application contractante de X dans X admet un unique point fixe.*

2.2 Résolution du Problème de Cauchy, régularité lipschitzienne globale

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (global Lipschitz)) *On fait l'hypothèse $\Omega = E$ et f continue et* globalement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Le Problème de Cauchy admet alors une unique solution globale.*

Preuve : Réduction au cas I compact, puis application du théorème du point fixe de Banach dans

$$X := C(I, E), \quad \|x\|_X := \max_{t \in I}(e^{-2L|t-t_0|}|x(t)|_E)$$

à

$$T \colon x \mapsto Tx, \quad Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

L'unicité est aussi une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3 *On suppose que $\Omega = E$ et que f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit (I, x) et $(I, \widehat{x})$ deux solutions globales au Problème de Cauchy de donnée initiale x_0 et $\widehat{x}_0 \in E$ respectivement. L'écart entre les solutions au temps t est estimé de la manière suivante :*

$$\forall t \in I, |x(t) - \widehat{x}(t)|_E \leq e^{L|t-t_0|}|x_0 - \widehat{x}_0|_E$$

où L est une constante de Lipschitz de f par rapport à sa deuxième variable.

C'est une conséquence du lemme de Gronwall

Lemme 2 (Gronwall) *Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $u, f, g \in C(I;\mathbb{R})$ des fonctions positives telles que*

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} g(s)u(s)ds \right| .$$

La fonction u vérifie alors l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, \quad u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)e^{\int_s^t g(\tau)d\tau} ds \right| .$$

Application du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement Lipschitz : résolution des équations *linéaires*.

2.3 Résolution du Problème de Cauchy, régularité lipschitzienne locale

2.3.1 Solutions locales

Théorème 3 *Soit f une application $I \times \Omega \to E$ continue et soit η, r, M, L positifs tels que*

- $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \subset I \times \Omega,$
- $|f|_E \leq M$ *sur* $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r),$
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E,$

pour tout $(t, x_1, x_2) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \times B(x_0, r)$. Il existe alors une solution locale (J, x) du Problème de Cauchy, avec $J = [t_0 - \widehat{\eta}, t_0 + \widehat{\eta}]$ où $\widehat{\eta} := \min(\eta, r/2M)$.

Corollaire 1 (Existence d'une solution locale) *On suppose que f est continue et* localement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Il existe alors une solution locale (J, x) du Problème de Cauchy.*

Théorème 4 (Unicité des solutions, cas localement Lipschitz) *On suppose que f est continue et* localement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit (J, x) et $(\widehat{J}, \widehat{x})$ deux solutions locales du Problème de Cauchy de même donnée initiale x_0. Les solutions x et $\widehat{x}$ coïncident sur $J \cap \widehat{J}$.*

Dans le Théorème 3, le temps d'existence $\widehat{\eta}$ ne dépend pas de L. Cela permet de montrer (par utilisation du Théorème d'Ascoli) le Théorème de Péano, vrai uniquement lorsque E est de **dimension finie**

Théorème 5 (Péano) *On suppose que f est continue $I \times \Omega$ et que E est de dimension finie. Il existe alors une solution locale (J, x) du Problème de Cauchy.*

On peut même montrer que toute solution locale peut être prolongée en une solution maximale. Il n'y a **pas** unicité des solutions maximales (*contre-exemple* : vidange d'un bassin).

Preuve du Théorème d'existence d'une solution locale, Théorème 3 : Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ une fonction de *troncature* qui vaut 1 sur $[0, 1/2]$ et 0 sur $[1, +\infty[$. On pose

$$g(t,x) := \begin{cases} \theta\left(\dfrac{|x-x_0|_E}{r}\right) f(t,x) & \text{si} \quad (t,x) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times B(x_0,r), \\ 0 & \text{si} \quad (t,x) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times (E \setminus B(x_0,r)). \end{cases}$$

On vérifie que g est continue, bornée par M et *globalement* lipschitzienne en sa deuxième variable sur $I \times E$. Le Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement Lipschitzien) donne l'existence d'une solution globale (I, y) au Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= g(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

On montre ensuite que $y(t)$ reste dans $B(x_0, r/2)$ si $t \in [t_0 - \widehat{\eta}, t_0 + \widehat{\eta}]$, ce qui assure que $g(t, y(t)) = f(t, y(t))$ pour ces t et fournit une solution locale du Problème de Cauchy.

■

Preuve du Théorème d'unicité des solutions locales, Théorème 4 : Soit J_0 intervalle compact dans $J \cap \widehat{J}$. Par continuité des solutions, $K := x(J_0) \cup \widehat{x}(J_0)$ est un compact de Ω et $A := J_0 \times K$ est un compact de $I \times \Omega$. La Proposition 2 montre que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur A, avec, disons, une constante de Lipschitz L. Pour $t \in J_0$, on a

$$\begin{aligned} |x(t) - \widehat{x}(t)|_E &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, \widehat{x}(s)) ds \right|_E \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, \widehat{x}(s))|_E ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - \widehat{x}(s)|_E ds \right|. \end{aligned}$$

On conclut à l'égalité des solutions par le lemme de Gronwall. ■

2.3.2 Solutions maximales

Théorème 6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (local Lipschitz)) *On suppose que f est continue et* localement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Alors il existe une unique solution maximale (J, x) au Problème de Cauchy, qui est définie sur un intervalle J ouvert.*

Application au calcul : voir TD.

Application : définition du *flot*

Définition 3 *On suppose que f est continue et* localement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Pour $x_0 \in \Omega$, on note J_{x_0} l'intervalle de définition de la solution maximale du Problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = x_0$ et on pose*

$$\mathcal{D}(\varphi) := \bigcup_{x \in \Omega} (J_x \times \{x\}).$$

On définit le flot *φ de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ comme l'application $\mathcal{D}(\varphi) \to \Omega$ qui à (t, x) associe la valeur au temps t de la solution maximale du Problème de Cauchy ayant la valeur x au temps $t = 0$.*

Dessin. Notation $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$.

Proposition 4 *On suppose que f est continue et* localement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. L'ensemble $\mathcal{D}(\varphi)$ est ouvert et partitionné par les trajectoires. Si f ne dépend pas de t alors $\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}$.*

Voir Paragraphe 5 pour la preuve de cette proposition, où l'on prouvera aussi la continuité du flot φ.

Preuve du Théorème d'existence-unicité de solutions maximales, Théorème 6 : solution maximale = union des solutions locales. La résolubilité locale (Corollaire 1) montre que J est ouvert et l'unicité est une conséquence du Théorème d'unicité des solutions locales, Théorème 4 et du résultat de recollement des solutions.

3 Explosion de la solution maximale

Cadre : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E, f application $I \times \Omega \to E$ continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable.

Soit (J, x) la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in J, \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

L'intervalle J est ouvert, disons de la forme $]T_-, T_+[$. Si $T_+ < \sup I$, la solution maximale x "explose" au voisinage du temps T_+, de la manière décrite par les théorèmes suivants.

Théorème 7 (Théorème de sortie de tout compact) *Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du Problème de Cauchy. Si $T_+ < \sup I$, alors la trajectoire $\{x(t)\}$ sort de tout compact au voisinage de T_+, c'est-à-dire : quelque soit $K \subset \Omega$ compact, il existe $T_K \in]T_-, T_+[$ tel que, pour tout $t \in [T_K, T_+[$, $x(t) \in \Omega \setminus K$.*

Corollaire 2 (Explosion en dimension finie) *On suppose $\Omega = E$ et E de dimension finie. Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du Problème de Cauchy. Si $T_+ < \sup I$, alors*

$$\lim_{t \to T_+} |x(t)|_E = +\infty$$

Remarque : si E est de dimension **infinie**, on peut avoir $T_+ < \sup I$ bien que $(|x(t)|_E)$ reste bornée dans un voisinage de T_+ (voir Devoir à la maison).

Preuve du Théorème de sortie de tout compact, Théorème 7 : on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un compact K et une suite croissante de temps (t_n) telle que $t_n \to T_+$ et $x(t_n) \in K$ pour tout K. Soit alors $x_+ \in K$ une valeur d'adhérence de la suite $(x(t_n))$. Comme f est continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable, il existe η, r, L, M des réels positifs tels que

- $[T_+ - \eta, T_+ + \eta] \times B(x_+, r) \subset I \times \Omega$,
- $|f|_E \leq M$ sur $[T_+ - \eta, T_+ + \eta] \times B(x_+, r)$,
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E$,

pour tout (t, x_1), $(t, x_2) \in [T_+ - \eta, T_+ + \eta] \times B(x_+, r)$. On pose $\widehat{\eta} = \min(\eta, r/2M)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|T_+ - t_n| < \widehat{\eta}/3$ et $|x(t_n) - x_+|_E < r/2$. On a alors

- $[t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B(x(t_n), r/2) \subset I \times \Omega$,
- $|f|_E \leq M$ sur $[t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B(x(t_n), r/2)$,
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E$,

pour tout (t, x_1), $(t, x_2) \in [t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times B(x(t_n), r/2)$. D'après le Théorème 3, il existe une solution locale $([t_n - \alpha, t_n + \alpha], y)$ au Problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}(t) & = & f(t, y(t)), \\ y(t_n) & = & x(t_n), \end{array} \right.$$

avec $\alpha = \min(\eta/2, R/M)$. On a donc $\alpha = \widehat{\eta}/2$. En particulier $t_n + \alpha \geq T_+ - \widehat{\eta}/3 + \widehat{\eta}/2$ et $t_n + \alpha > T_+$. En posant

$$\widetilde{x}(t) = \left\{ \begin{array}{lll} x(t) & \text{si} & t \in]T_-, t_n], \\ y(t) & \text{si} & t \in [t_n, t_n + \alpha[, \end{array} \right.$$

on définit donc un prolongement strict de x. Cela contredit la maximalité de $(]T_-, T_+[, x)$.

■

Preuve du Corollaire 2 : On applique le Théorème de sortie de tout compact, K étant le boule fermée centrée à l'origine et de rayon R : pour tout $R > 0$, il existe $T_R \in]T_-, T_+[$ tel que $|x(t)| > R$ pour tout $t \in [T_R, T_+[$. Cela signifie exactement que $\lim\limits_{t \to T_+} |x(t)|_E = +\infty$.

■

Application : si E est de dimension finie, les bornés sont relativement compacts : il suffit donc de montrer qu'une solution maximale est bornée pour savoir qu'elle est globale.

Exemple 1 : Fonction de Lyapunov. Soit $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. On suppose que l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ a une *fonction de Lyapunov*, c'est-à-dire qu'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad DV(x) \cdot f(x) \leq 0$$

et

$$\forall R > 0, \quad \{x \in \mathbb{R}^N, V(x) \leq R\} \text{ est borné.}$$

Alors les solutions du Problème de Caucy sont globales en temps positif. Cas particulier : système gradient $\dot{x} = -DV(x)$ ou système hamiltonien $\dot{p} = D_q H$, $\dot{q} = -D_p H$.

Exemple 2 : Champ rentrant sur la sphère. voir DM.

4 Continuité par rapport aux données

Cadre : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E, f application $I \times \Omega \to E$ continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable.

Dans tout ce paragraphe, on note $x(t; x_0)$ la solution maximale du Problème de Cauchy.

4.1 Continuité par rapport aux données, cas globalement Lipschitz

Proposition 5 (Dépendance continue, cas globalement Lipschitz) *On fait l'hypothèse $\Omega = E$ et f continue et* globalement *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Pour tout $J \subset I$ compact contenant t_0 dans son intérieur, l'application $E \to C(J; E)$ qui à x_0 associe $x(\cdot; x_0)$ est lipschitzienne.*

Corollaire 3 *Avec les même hypothèses, l'application $J \times E \to E$ qui à (t, x_0) associe $x(t; x_0)$ est localement lipschitzienne.*

Preuve de la Proposition 5 : soit $b > 0$ tel que $J \subset [t_0 - b, t_0 + b]$ et soit L une constante de Lipschitz de f par rapport à sa deuxième variable. La Proposition 3 montre que

$$|x(t; x_0) - x(t; \widehat{x}_0)|_E \leq e^{Lb} |x_0 - \widehat{x}_0|$$

donc que $x(\cdot; x_0) \colon E \to C(J; E)$ est e^{Lb}-lipschitzienne. ■

Preuve du Corollaire 3 : soit $x_0 \in E$, $s \in J$ et $r > 0$. On note K le compact $J \times x(J; x_0)$ et M une borne de f sur K. Soit $\widehat{x}_0 \in B(x_0, r)$ et $\widehat{s} \in J \cap]s - r, s + r[$. On a

$$\begin{aligned}
|x(s; x_0) - x(\widehat{s}, \widehat{x}_0)|_E &\leq |x(\widehat{s}; x_0) - x(\widehat{s}, \widehat{x}_0)|_E + |x(s; x_0) - x(\widehat{s}, x_0)|_E \\
&\leq e^{Lb} |x_0 - \widehat{x}_0| + \left| \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t; x_0)) dt \right|_E \\
&\leq e^{Lb} |x_0 - \widehat{x}_0| + \int_s^{\widehat{s}} |f(t, x(t; x_0))|_E \, dt \\
&\leq e^{Lb} |x_0 - \widehat{x}_0| + M |s - \widehat{s}|.
\end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat. ■

4.2 Continuité par rapport aux données, cas localement Lipschitz

Proposition 6 (Dépendance continue, cas localement Lipschitz) *Soit f continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$. Il existe $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'application $B(x_0, \varepsilon) \to C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \Omega)$ qui à $\widehat{x}_0$ associe $x(\cdot; \widehat{x}_0)$ est lipschitzienne.*

Preuve de la Proposition 6 : Soit η, r, M, L positifs tels que

- $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \subset I \times \Omega$,
- $|f|_E \leq M$ sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r)$,
- $|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_E \leq L|x_1 - x_2|_E$,

pour tout $(t, x_1, x_2) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B(x_0, r) \times B(x_0, r)$. On reprend les notations de la preuve du Théorème 3 et on pose $\alpha = \widehat{\eta}$ et $\varepsilon = r/2$. Pour tout $\widehat{x}_0$, $\widetilde{x}_0 \in B(x_0, \varepsilon)$, les solutions $x(\cdot; \widehat{x}_0)$ et $x(\cdot; \widetilde{x}_0)$ du Problème de Cauchy de données initiales $(t_0, \widehat{x}_0)$ et $(t_0, \widetilde{x}_0)$ respectivement sont bien définies sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et coïncident sur cet intervalle avec les solutions $y(\cdot; \widehat{x}_0)$ et $y(\cdot; \widetilde{x}_0)$ du problème de Cauchy associé à l'équation $\dot{y}(t) = g(t, y(t))$ où g est L-globalement lipschitzienne en la deuxième variable. D'après la Proposition 5, on a donc

$$\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad |x(t; \widehat{x}_0) - x(t; \widetilde{x}_0)|_E \leq e^{L\alpha} |\widehat{x}_0 - \widetilde{x}_0|.$$

Cela prouve le résultat. ■

Remarque 2 *On peut ici aussi prouver un analogue du Corollaire 3 ; pour cela il faut toutefois montrer un résultat d'uniformité du temps d'existence qui est difficile, c'est l'objet du paragraphe suivant.*

4.3 Continuité par rapport au paramètre

On considère le Problème de Cauchy à paramètre

$$\begin{cases} \dot{x}_\lambda(t) & = & f(t, x(t), \lambda), \\ x_\lambda(t_0) & = & x_0, \end{cases}$$

et on s'interroge sur la dépendance de la solution en λ. Voici comment on se ramène au problème de la dépendance en la donnée initiale : on pose

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \rho \end{pmatrix}, F(t, y) = \begin{pmatrix} f(t, x, \rho) \\ 0 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

et on considère le Problème de Cauchy étendu

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = & F(t, y(t)), \\ y(t_0) & = & y_0. \end{cases}$$

C'est un système d'équations dont la deuxième est $\dot{\rho} = 0$, de solution $\rho(t) = \text{cst} = \lambda$. On est alors ramené au problème de la dépendance en la donnée initiale. Sous les hypothèses adéquates (λ varie dans un ouvert d'un espace de Banach et f est localement lipschitzienne par rapport à λ), il suffit d'appliquer les résultats précédents pour conclure à la continuité de $\lambda \mapsto x_\lambda(t)$.

5 Continuité du flot

Cadre : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert connexe d'un espace de Banach E, f application $I \times \Omega \to E$ continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable.

On rappelle la définition du flot et de son domaine.

Définition 4 *Pour $x_0 \in \Omega$, on note J_{x_0} l'intervalle de définition de la solution maximale du Problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = x_0$ et on pose*

$$\mathcal{D}(\varphi) := \bigcup_{x \in \Omega} (J_x \times \{x\}).$$

On définit le flot *φ de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ comme l'application $\mathcal{D}(\varphi) \to \Omega$ qui à (t, x) associe la valeur au temps t de la solution maximale du Problème de Cauchy ayant la valeur x au temps $t = 0$.*

Théorème 8 (Continuité du flot) *L'ensemble $\mathcal{D}(\varphi)$ est ouvert et le flot $\varphi \colon \mathcal{D}(\varphi) \to \Omega$ est une application localement lipschitzienne.*

Preuve du théorème de continuité du flot, Théorème 8 : Le début de la preuve ressemble à la preuve du théorème d'unicité des solutions locales, Théorème 4. Soit $(s, a) \in \Omega$ et soit (J_a, x) la solution maximale du Problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = a$. Soit $J \subset J_a$ un intervalle compact dont l'intérieur contient s et 0. Alors $K := J \times x(J)$ est compact donc f est lipschitzienne en la deuxième variable sur un voisinage V de K dans $I \times \Omega$. Quitte à réduire V, on peut supposer que f est bornée sur V : il existe L et M positifs tels que

$$|f|_E \leq M \text{ et } f \text{ est } L-\text{lipschtzienne en la deuxième variable sur } V. \tag{2}$$

Remarquons en particulier que, pour chaque $(t_0, x_0) \in V$, et d'après le Théorème de résolution locale, Théorème 3, on sait que le Problème de Cauchy avec conditions initiales (t_0, x_0) admet une solution locale. Soit $r > 0$. Admettons qu'on ait prouvé

$$J \times \overline{B}(a, r) \subset \mathcal{D}(\varphi), \tag{3}$$

$$J \times \overline{B}(a, r) \subset V. \tag{4}$$

On voit alors que $\mathcal{D}(\varphi)$ est ouvert ($J \times \overline{B}(a, r)$ est un voisinage de (s, a)). De plus, comme f est L-lipschitzienne en sa deuxième variable sur V, le résultat (4) et le Lemme de Gronwall montrent que

$$|\varphi(t, b_1) - \varphi(t, b_2)|_E \leq e^{Lt} |b_1 - b_2|_E \quad \forall t \in J. \tag{5}$$

donc

$$|\varphi(t,b_1)-\varphi(t,b_2)|_E \le e^{LT}|b_1-b_2|_E, \quad \forall t\in J \tag{6}$$

où $T>0$ est tel que $J\subset[-T,T]$. Si $t_1,t_2\in J$ et $b\in\overline{B}(a,r)$ alors le résultat (4), la borne de f sur V et l'équation montrent

$$\begin{aligned}|\varphi(t_2,b)-\varphi(t_1,b)| = \left|\int_{[t_1,t_2]}\dot\varphi(t,b)dt\right|_E &= \left|\int_{[t_1,t_2]} f(t,\varphi(t,b))dt\right|_E\\ &\le \int_{[t_1,t_2]}|f(t,\varphi(t,b))|_E dt\\ &\le M|t_1-t_2|.\end{aligned} \tag{7}$$

Cela, avec l'inégalité de Lipschitz par rapport à le deuxième variable (6), montre que le flot est lipschitzien sur $J\times\overline{B}(a,r)$. Il est donc localement lipschitzien sur $\mathcal{D}(\varphi)$.

Il reste donc à prouver les inclusions (3) et (4). On introduit la distance

$$d(z,z') := \max(|t-t'|,|y-y'|_E)$$

entre $z=(t,y)$ et $z'=(t',z')\in I\times\Omega$, et pour $\varepsilon>0$, le ε-voisinage fermé $\overline{V}_\varepsilon(K)$ de K, c'est-à-dire l'ensemble

$$\overline{V}_\varepsilon(K)=\{z\in I\times\Omega; d(z,K)\le\varepsilon\}.$$

Enfin, on note

$$\overline{W}_\varepsilon=\{(t,y)\in J\times\Omega; |y-\varphi(t,a)|\le\varepsilon\}.$$

On a $\overline{W}_\varepsilon\subset\overline{V}_\varepsilon(K)$ et il existe $\varepsilon>0$ tel que $\overline{V}_\varepsilon(K)\subset V$ [1]. Pour un tel ε, l'ensemble $\overline{W}_\varepsilon$ est donc inclut dans V. Soit maintenant $r:=\varepsilon e^{-LT}$ et $b\in\overline{B}(a,r)$. Notons J_+ le segment $J\cap\mathbb{R}_+^*$ et X l'ensemble des temps positifs jusqu'auxquels la trajectoire issue de b est définie et reste dans $\overline{W}_\varepsilon$:

$$X:=\{\tau\in J_+;]0,\tau]\subset J_b, (t,\varphi(t,b))\in\overline{W}_\varepsilon \text{ pour tout } t\in[0,\tau]\}.$$

Comme $\overline{W}_\varepsilon$ est fermé, X est fermé (dans J_+). D'autre part X est ouvert dans J_+ ; en effet si $\tau\in X$, soit $\tau=\sup J_+$, auquel cas il n' y a rien à montrer (car alors $X=J_+\cap\mathbb{R}$ est bien l'intersection de J_+ avec un ouvert de $\mathbb{R}$), soit $0<\tau<\sup J_+$ et alors, d'une part on peut étendre strictement $\varphi(\cdot,b)$ au delà de τ, disons jusqu'à $\tau+\widetilde{\eta}$, puisque on sait résoudre localement le Problème de Cauchy sur V, d'autre part, d'après (6) et le lemme de Gronwall, on aura

$$|\varphi(\tau,b)-\varphi(\tau,a)|_E\le e^{L\tau}|b-a|_E\le e^{L(\tau-T)}\varepsilon.$$

Comme $\tau<\sup J_+\le T$, on a $|\varphi(\tau,b)-\varphi(\tau,a)|_E<\varepsilon$ et cela prouve (par continuité) que, quitte à réduire $\widetilde{\eta}$, la trajectoire restera dans $\overline{W}_\varepsilon$ lorsque $t\in[\tau,\tau+\widetilde{\eta}]$. Ainsi X est ouvert

[1] en effet, on aurait sinon l'existence d'une suite (z_n) du fermé $I\times\Omega\setminus V$ telle que $d(z_n,K)\to 0$ lorsque $n\to+\infty$; en choisissant z_n' dans K tel que $d(z_n,K)=d(z_n,z_n')$ on voit que (z_n) a les même valeurs d'adhérence que (z_n'), donc au moins une notée z_∞. À la limite $n\to+\infty$, on a la contradiction $z_\infty\in K$, $z_\infty\notin V$.

dans J_+. Enfin X est non-vide, comme on le voit en résolvant localement le Problème de Cauchy en $(0, b)$. L'ensemble X est ouvert, fermé non-vide de J_+ connexe donc $X = J_+$. En considérant de la même façon les temps négatifs, on montre (3) et (4), cela conclut la preuve. ■

Dans le cas où f est de classe C^p, $p \geq 1$, on peut montrer que le flot est de classe C^p sur son domaine de définition $\mathcal{D}(\varphi)$, c'est le **Théorème de différentiabilité du flot**. Sa preuve commence par la démonstration de la différentiabilité du flot par rapport aux conditions initiales. On remarque que, si on admet que le flot a une telle régularité on obtient, en dérivant l'équation différentielle $\dot{\varphi}(t; x) = f(t, \varphi(t; x))$ par rapport à x :

$$\dot{D}_x\varphi(t; x) = D_x f(t, \varphi(t; x)) D_x\varphi(t; x),$$

c'est-à-dire que la différentielle $D_x\varphi(t; x)$ est solution de l'équation différentielle *linéaire* $\dot{z} = D_x f(t, \varphi(t; x))z$. Les équations différentielles linéaires sont assez facile à résoudre (voir Chapitre suivant) et on peut partir de cela pour montrer l'existence de $D_x\varphi(t; x)$. Une autre méthode de preuve utilise le Théorème des fonctions imlpicites (c'en est une très jolie application). Voir par exemple le livre de Cartan (Henri Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann) pour une preuve par résolution de l'équation linéaire et Lafontaine (Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, pug) ou Lang (Serge Lang, *Real Analysis*) pour une preuve par Théorème des fonctions implicites.