L3-F01 Équations différentielles
Contrôle continu

27/02/07

Durée : une heure.

Les notes du cours sont autorisées. Autres documents et calculatrice interdits.

Exercice I

1) Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) - \cos(t)x(t) = e^{t+\sin(t)}.$$

2) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, déterminer la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) + \cos(t)x(t) + e^{t+\sin(t)}x(t)^2 = 0, \quad x(0) = x_0.$$

(On justifiera soigneusement les calculs et on donnera l'intervalle de définition de la solution maximale).

Exercice II

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $|\cdot|$ la norme associée. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \alpha |x - y|^2 \tag{1}$$

où $\alpha > 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$.

1) Montrer que f est injective.

2) On veut montrer que 0 est dans l'image de f.

2-a) Soit x et y deux solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = -f(x)$ définies sur un intervalle $[0, T]$, $T > 0$. Montrer que pout tout $t \in [0, T]$,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)| e^{-\alpha t}.$$

2-b) Soit x la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & -f(x(t)), \\ x(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

et $]T_-, T_+[$ son intervalle de définition. En appliquant la question 2-a) à x et $t \mapsto x(t+h)$, h assez petit, montrer que

$$\forall t \in [0, T_+[, |\dot{x}(t)| \leq |\dot{x}(0)| e^{-\alpha t}.$$

2-c) Montrer que x est bornée sur $[0, T_+[$ puis que $T_+ = +\infty$.

2-d) Montrer que $l := \lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ existe et que $f(l) = 0$.

3) Montrer que $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est surjective.

4) Montrer que l'inverse de f vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq \alpha^{-1} |x - y|.$$

Conclure.

Exercice III

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et x la solution maximale du Problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = \cos(x(t)) e^{-x(t)^2}, \quad x(0) = x_0.$$

Montrer que x est globale.