Evolution aléatoire d'interface, deux exemples

Julien Vovelle

Table des matières

Ce mini-cours de six heures est tiré des deux articles suivants :

1. *Zero-temperature 2D stochastic Ising model and anisotropic curve-shortening flow*, Hubert Lacoin, François Simenhaus et Fabio Toninelli, 2014, [LST14],
2. *The scaling limit of polymer pinning dynamics and a one dimensional Stefan freezing problem*, Hubert Lacoin, 2014, [Lac14].

Le paragraphe 2 est adapté de la preuve du Théorème 3.2 dans [LST14]. Le paragraphe 3 est adapté de la preuve du Théorème 2.3 dans [Lac14].

1 Processus stochastiques, rappels

1.1 Espérance conditionnelle

Proposition 1 (Espérance conditionnelle)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$. *Soit* X *une variable aléatoire réelle intégrable :* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Alors il existe une unique variable aléatoire* $\mathcal{G}$*-mesurable et intégrable* Z *telle que*

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Z), \quad \forall A \in \mathcal{G}. \tag{1}$$

On appelle Z *l'espérance conditionnelle de* X *sachant* $\mathcal{G}$*, qu'on note* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. *On a* $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$.

Sans rigueur, on peut dire que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, c'est X moyenné vis-à-vis de tout ce qui n'est pas $\mathcal{G}$. *Les exemples suivants sont tous une illustration de ce fait.* Avec cette propriété en tête, la dernière assertion de la proposition est évidente (moyenner partiellement puis moyenner, c'est comme moyenner tout court). On montre d'ailleurs $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$ simplement en prenant $A = \Omega$ dans la condition (1).

Exemple 1 Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par un événement $A \in \mathcal{F}$: $\mathcal{G} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X)}{\mathbb{P}(A)} \mathbf{1}_A + \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A^c} X)}{\mathbb{P}(A^c)} \mathbf{1}_{A^c}.$$

Cet exemple est généralisé en partie dans l'exemple 3 ci-dessous.

Exemple 2 Cet exemple est fondamental. Soit X, Y deux variables aléatoires *indépendantes*, soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On veut déterminer $Z = \mathbb{E}(f(X,Y)|\sigma(Y))$. Toute fonction $\sigma(Y)$-mesurable est de la forme $h(Y)$ avec h borélienne. Qu'est-ce donc que h ici ? C'est la fonction qui est obtenue en moyennant par rapport à “tout ce qui n'est pas Y”. Précisément, on a

$$\mathbb{E}(f(X,Y)|\sigma(Y)) = h(Y), \quad h(y) := \mathbb{E}(f(X,y)). \tag{2}$$

De même, si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration et (X_t) un processus de Markov homogène, alors, pour tout $t \geq s$,

$$\mathbb{E}(\varphi(X_t)|\sigma(X_s)) = \psi(X_s), \quad \psi(x) := \mathbb{E}_x(\varphi(X_{t-s})), \tag{3}$$

où $\mathbb{E}_x$ est l'espérance relativement au fait que $X_0 = x$.

Exemple 3 On prend $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des intervalles

$$A_{k,n} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right], \quad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}_n$ et soit $f \in C([0,1])$. On peut voir f comme une variable aléatoire (on choisit $x \in [0,1]$ puis on applique f). Alors $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$ est la fonction constante par morceaux vis-à-vis de la partition $\mathcal{A}_n$:

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \fint_{A_{k,n}} f(x)dx \mathbf{1}_{A_{k,n}},$$

où

$$\fint_{A_{k,n}} f(x)dx = \frac{1}{|A_{k,n}|} \int_{A_{k,n}} f(x)dx = 2^n \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f(x)dx.$$

La notion d'espérance conditionnelle est très pratique lorsqu'on considère un processus stochastique (disons un processus stochastique adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) pour contrôler l'évolution du hasard. Intuitivement, plus le temps avance, plus l'aléa intervenant dans la détermination de X_t est grand (c'est la condition de croissance de la filtration). Considérer la quantité $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ pour $t \geq s$, c'est considérer X_t réduit à la complexité mesurée par $\mathcal{F}_s$. Voir par exemple la preuve de la propriété de semi-groupe (13) ci-dessous. Avec le même point de vue, si on cherche à contrôler l'accroissement du caractère aléatoire d'un processus, il apparaît une classe particulièrement intéressante de processus, les martingales.

1.2 Martingales

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et (M_t) un processus adapté tel que M_t est intégrable pour tout $t \geq 0$. On dit que (M_t) est une martingale (relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) si

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$$

pour tout $t \geq s$. Un exemple élémentaire de martingale est $M_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ où X est une v.a. intégrable. On rappelle l'inégalité de Doob pour les martingales continues.

Théorème 2 (Inégalité de Doob)**.** *Soit M_t une martingale continue et $p \geq 1$. Pour tout $a > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_t| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^p}\mathbb{E}|M_t|^p, \tag{4}$$

pour tout $t \geq 0$.

Voici un mot sur la preuve : grâce à la continuité on se ramène au cas discret et on utilise d'autre part le fait que $\bar{M}_t := |M_t|^p$ est une sous-martingale, à savoir $\bar{M}_s \leq \mathbb{E}(\bar{M}_t|\mathcal{F}_s)$ p.s. pour tout $t \geq s$.

Illustration du cas discret (cas $p = 1$) : on se place dans le cadre de l'exemple 2 du paragraphe 1.1 précédent. Soit la martingale $M_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$. On suppose $f \geq 0$ de sorte que $M_n \geq 0$. Soit $n_1 \leq n_2 \leq \ldots n_k$. Montrer (graphiquement...)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq i\leq k} M_{n_i} \geq a\right) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(M_{n_k}).$$

On pourra commencer par $k = 1$ et se contenter de traiter ensuite les cas $k = 2$, $n_2 = n_1 + 1$.

1.3 Processus de Markov

1.3.1 Mouvement brownien, processus de Poisson (rappels)

Mouvement brownien C'est le processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues, à accroissement indépendants, à incréments $B_t - B_s$ de loi normale centrée de variance $t - s$, satisfaisant $B_0 = 0$.

Processus de Poisson de paramètre λ Soit $\lambda > 0$, le processus de Poisson de paramètre λ est la donnée d'une suite de temps de saut $(T_n)_{n\geq 1}$ tels que (en posant $T_0 = 0$) les v.a. $(T_{n+1} - T_n)_{n\geq 0}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. La fonction aléatoire de comptage N_t égale au nombre de sauts s'étant produits avant le temps t,

$$N_t := \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t},$$

suit alors une loi de Poisson de paramètre λt :

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

1.3.2 Générateur

Temps discret Soit E un espace métrique complet. Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à temps discret sur l'espace des états E. Etant donné $\varphi \in C_b(E)$ (fonctions continues bornées sur E), et $x \in E$, on pose

$$P_1\varphi(x) = \mathbb{E}_x\varphi(X_1), \quad \mathscr{L}\varphi(x) = P_1\varphi(x) - \varphi(x),$$

où E_x désigne l'espérance conditionnellement au fait que la chaîne de Markov part de x : $X_0 = x$. On peut aussi exprimer $P_1\varphi(x)$ en faisant intervenir la loi μ_1 de X_1 :

$$P_1\varphi(x) = \int_E \varphi(y)d\mu_1 = \langle\varphi, \mu_1\rangle,$$

toujours sous réserve qu'on est parti de x à $n = 0$ ($\mu_0 = \delta_x$). On suppose que P_1 a la propriété dite "de Feller", à savoir :

$$\varphi \in C_b(E) \Rightarrow P_1\varphi \in C_b(E). \tag{5}$$

Dans ce cas P_1 est un opérateur linéaire (de norme plus petite que 1) sur $C_b(E)$, appelé "opérateur de transition".

Par homogénéité de la chaîne de Markov, on a alors, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\varphi(X_n) &= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}(\varphi(X_n)|\sigma(X_{n-1})\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[P_1\varphi((X_{n_1})\big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Par récurrence, on obtient

$$\mathbb{E}_x\varphi(X_n) = P_1^n\varphi(x). \tag{7}$$

Noter qu'on peut en effet itérer l'opérateur P_1 grâce à (5). On peut généraliser (7) en considérant l'espérance conditionnelle : si $0 \leq m < n$, alors, comme ci dessus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\varphi(X_n)|\mathcal{F}_m\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\varphi(X_n)|\sigma(X_{n-1})|\mathcal{F}_m\big] \\ &= \mathbb{E}\big[P_1\varphi((X_{n_1})|\mathcal{F}_m\big]. \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient $\mathbb{E}\big[\varphi(X_n)|\mathcal{F}_m\big] = \mathbb{E}\big[P_1^{n-m}\varphi((X_m))|\mathcal{F}_m\big]$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\big[\varphi(X_n)|\mathcal{F}_m\big] = P_1^{n-m}\varphi(X_m) \tag{8}$$

par la propriété de Markov. De (8), on déduit le résultat suivant : si $\varphi \in C_b(E)$, alors

$$M_n := \varphi(X_n) - \varphi(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{L}\varphi(X_k)$$

définit une martingale. En effet, si $0 \leq m < n$, alors, d'après (8), on a

$$\mathbb{E}(\mathscr{L}\varphi(X_k)|\mathcal{F}_m) = \begin{cases} P_1^{k-m}\mathscr{L}\varphi(X_m) & \text{si } k \geq m, \\ \mathscr{L}\varphi(X_k) & \text{si } k \leq m, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) \\ =&P_1^{n-m}\varphi(X_m) - \varphi(X_0) - \sum_{k=0}^{m-1}\mathscr{L}\varphi(X_k) - \sum_{k=m}^{n-1}P_1^{k-m}\mathscr{L}\varphi(X_m). \end{aligned}$$

Comme $\mathscr{L} = P_1 - \mathrm{Id}$, on a, par somme téléscopique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1}P_1^{k-m}\mathscr{L}\varphi(X_m) &= \sum_{k=m}^{n-1}P_1^{k-m+1}\varphi(X_m) - P_1^{k-m}\varphi(X_m) \\ &= P_1^{n-m}\varphi(X_m) - \varphi(X_m). \end{aligned}$$

On conclut

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) = \varphi(X_m) - \varphi(X_0) - \sum_{k=0}^{m-1}\mathscr{L}\varphi(X_k) = M_m.$$

Temps continu Soit E un espace métrique complet et soit maintenant $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov à temps continu, homogène, sur l'espace des états E. On définit l'opérateur de transition P_t par

$$P_t\varphi(x) = \mathbb{E}_x\varphi(X_t), \quad \varphi \in C_b(E), \quad x \in E,$$

où E_x est l'espérance conditionnelle au fait que $X_0 = x$. On suppose là aussi satisfaite la propriété de Feller : pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi \in C_b(E) \Rightarrow P_t\varphi \in C_b(E), \tag{9}$$

et

$$\lim_{t\to 0}\|P_t\varphi - \varphi\|_{C_b(E)} = 0, \tag{10}$$

de sorte que P_t définit un opérateur de $C_b(E)$ dans lui-même (en effet P est linéaire et clairement de norme ≤ 1). En temps discret, on a défini sans difficulté le générateur du processus de Markov en posant $\mathscr{L} = P_1 - \mathrm{Id}$. En temps continu, le générateur du processus de Markov est plus complexe à définir, mais son sens plus apparent : on définit

$$\mathscr{L}\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{P_t\varphi - \varphi}{t} \tag{11}$$

pour tous les φ admissibles, constituant ce qu'on appelle le domaine de $\mathscr{L}$,

$$\mathcal{D}(\mathscr{L}) = \left\{ \varphi \in C_b(E); \lim_{t \to 0} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } C_b(E) \right\}. \tag{12}$$

Par exemple, dans le cas du mouvement brownien, on a $P_t\varphi = H_t * \varphi$ (convolution en x) où $H_t = K_{t/2}$, K_t étant le noyau de la chaleur

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Le générateur est $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_x^2$ (la moitié du Laplacien). Si (X_t) est le processus de saut entre les deux valeurs -1 et $+1$ donné par

$$X_t = (-1)^{N_t} X_0,$$

où N_t est le processus de comptage d'un processus de Poisson de paramètre λ, alors

$$P_t\varphi(x) = \varphi(x)\mathbb{P}(N_t \text{ pair}) + \varphi(-x)\mathbb{P}(N_t \text{ impair}), \quad x \in \{-1, 1\}.$$

On a $\mathbb{P}(N_t \geq 2) = \mathcal{O}(t^2)$ pour t petit donc

$$\begin{aligned} P_t\varphi(x) &= \varphi(x)\mathbb{P}(N_t = 0) + \varphi(-x)\mathbb{P}(N_t = 1) + \mathcal{O}(t^2) \\ &= \varphi(x)e^{-\lambda t} + \varphi(-x)e^{-\lambda t}\lambda t + \mathcal{O}(t^2) \\ &= \varphi(x) + \lambda(\varphi(-x) - \varphi(x))t + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{L}\varphi(x) = \lambda(\varphi(-x) - \varphi(x)).$$

Voir (35) pour un calcul similaire.

Revenons à un processus de Markov général. Par homogénéité de X_t, on a $P_{t+s} = P_tP_s$ pour tout $s, t \geq 0$ (c'est-à-dire, $(P_t)_{t\geq 0}$ constitue un semi-groupe). En effet, comme en (6), on écrit

$$P_{t+s}\varphi(x) = \mathbb{E}_x(\varphi(X_{s+t})) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}(\varphi(X_{s+t})|\mathcal{F}_t)\right]$$

La propriété de Markov donne $\mathbb{E}(\varphi(X_{s+t})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\varphi(X_{s+t})|\sigma(X_t))$. Par (3), on a

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{s+t})|\sigma(X_t)) = \psi(X_t),$$

où ψ est définie par $\psi(x) = \mathbb{E}(\varphi(X_{s+t})|X_t = x)$. Par homogénéité de la chaîne de Markov, on a donc

$$\psi(x) = \mathbb{E}(\varphi(X_s)|X_0 = x) = P_s\varphi(x).$$

On en déduit

$$P_{t+s}\varphi(x) = \mathbb{E}_x\left[P_s\varphi(X_t)\right] = P_tP_s\varphi(x). \tag{13}$$

Noter qu'on a montré au passage que

$$\mathbb{E}(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{t-s}\varphi(X_s). \tag{14}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$. De la propriété de semi-groupe $P_{t+s} = P_t P_s$, il découle que $t \mapsto P_t\varphi$ est dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $C_b(E)$, et la propriété

$$\frac{d}{dt}P_t\varphi = P_t\mathscr{L}\varphi, \tag{15}$$

pour tout $t \geq 0$. En effet, pour $\tau > 0$, en utilisant $P_{t+\tau} = P_t P_\tau$, on a

$$\frac{P_{t+\tau}\varphi - P_t\varphi}{\tau} = P_t\left[\frac{P_\tau\varphi - \varphi}{\tau}\right].$$

Or

$$\frac{P_\tau\varphi - \varphi}{\tau} \to \varphi,$$

dans $C_b(E)$ lorsque $\tau \to 0$ et P_t est continu sur $C_b(E)$. On en déduit (15).

1.3.3 Martingale 1

Supposons (X_t) à trajectoires continues. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$. Posons

$$M_t = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t \mathscr{L}\varphi(X_s)ds. \tag{16}$$

Alors M_t est une martingale. D'abord M_t est bien défini puisque, presque sûrement, $s \mapsto \mathscr{L}\varphi(X_s)$ est continue, donc intégrable. De surcroît, toujours par continuité, on a, presque sûrement,

$$\int_0^t \mathscr{L}\varphi(X_s)ds = \lim_{|\sigma|\to 0}\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\mathscr{L}\varphi(X_{t_{i-1}}), \tag{17}$$

où $\sigma = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t)$ est une subdivision de $[0,t]$ de pas $|\sigma| = \max_{0\leq i<n}(t_i - t_{i-1})$. On a aussi convergence dans $L^1(\Omega)$, en écrivant

$$\int_0^t \mathscr{L}\varphi(X_s)ds - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\mathscr{L}\varphi(X_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathscr{L}\varphi(X_s) - \mathscr{L}\varphi(X_{t_{i-1}})ds$$

et en utilisant le théorème de convergence dominée (rappel : $\mathscr{L}\varphi$ est une fonction bornée). Cela permet de justifier des interversions "espérance-intégrale", et en particulier le résultat suivant : pour $0 \leq \tau \leq t$,

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t \mathscr{L}\varphi(X_s)ds\Big|\mathcal{F}_\tau\Big] = \int_0^\tau \mathscr{L}\varphi(X_s)ds + \int_\tau^t \mathbb{E}[\mathscr{L}\varphi(X_s)|\mathcal{F}_\tau]ds.$$

D'après (14) et (15), on a

$$\begin{aligned}\int_\tau^t \mathbb{E}[\mathscr{L}\varphi(X_s)|\mathcal{F}_\tau]ds &= \int_\tau^t P_{s-\tau}\mathscr{L}\varphi(X_\tau)ds \\ &= \int_\tau^t \frac{d}{ds}P_{s-\tau}\varphi(X_\tau)ds = P_{t-\tau}\varphi(X_\tau) - \varphi(X_\tau).\end{aligned}$$

On vérifie que cette dernière identité assure que M_t défini par (16) satisfait la propriété de martingale $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_\tau) = M_\tau$.

Dans le cas du mouvement brownien, on a $\mathscr{L}\varphi(B_s) = \frac{1}{2}\varphi''(B_s)$ et la formule d'Itô donne

$$M_t := \varphi(B_t) - \varphi(B_0) - \int_0^t \mathscr{L}\varphi(B_s)ds = \int_0^t \varphi'(B_s)dB_s,$$

qui est bien une martingale.

1.3.4 Martingale 2

Voici un autre cas dans lequel on peut construire une martingale. Supposons que $\psi \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ soit valeur propre de $\mathscr{L}$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathscr{L}\psi = \lambda\psi$. Alors

$$M_t := e^{-\lambda t}\psi(X_t) - \psi(X_0) \tag{18}$$

est une martingale. En effet, d'après (15), on a $P_t\psi = e^{\lambda t}\psi$ et on calcule, pour $0 \le \tau \le t$, par (14),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_\tau) &= e^{-\lambda t}P_{t-\tau}\psi(X_\tau) - \psi(X_0) \\ &= e^{-\lambda t}e^{\lambda(t-\tau)}\psi(X_\tau) - \psi(X_0) \\ &= e^{-\lambda\tau}\psi(X_\tau) - \psi(X_0) = M_\tau.\end{aligned}$$

1.4 Variation quadratique

Soit $(X_i)_{i\ge1}$ des variables aléatoires i.i.d, centrées ($\mathbb{E}(X_i) = 0$), satisfaisant $X_i \in L^4(\Omega)$, et soit la martingale discrète M_n définie par

$$M_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \ge 1.$$

On pose aussi $M_0 = 0$. On peut montrer que le carré M_n^2 se décompose en

$$M_n^2 = N_n + A_n,$$

où N_n et A_n sont des processus adaptés, N_n est une martingale et $n \mapsto A_n$ est croissante. En effet on a

$$M_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} X_iX_j. \tag{19}$$

Le deuxième terme dans le développement du carré de M_n se réécrit

$$2 \sum_{i=1}^{n} X_i M_{i-1}$$

et on vérifie que cela définit une martingale. Considérons maintenant le premier terme dans (19). Les $Y_i := X_i^2$ sont des variables aléatoires i.i.d, mais pour que leurs sommes partielles définissent une martingale, il faudrait que les Y_i soit centrée ($\mathbb{E}(Y_i) = 0$), ce qui n'est pas le cas à moins que les X_i soient nuls. Corrigeons donc cette somme en introduisant la moyenne manquante : on a

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2),$$

qui est la somme d'une martingale et d'un processus (déterministe ici) croissant. On en déduit la décomposition voulue.

Considérons le cas continu maintenant : soit (M_t) une martingale continue bornée. On peut écrire, comme dans le cas discret,

$$M_t = X_1 + \cdots + X_n,$$

en considérant une subdivision $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ de $[0, t]$ et en posant

$$X_i = M_{t_i} - M_{t_{i-1}}.$$

En élevant au carré, puis en répartissant les termes à la manière du cas discret, on devrait pouvoir démontrer la décomposition

$$M_t^2 = N_t + A_t, \tag{20}$$

où N_t est une martingale et A_t un processus croissant en t nul en $t = 0$, les deux processus étant adaptés. C'est effectivement le cas, cette décomposition est unique et on appelle A_t la variation quadratique de M_t, notée $\langle M, M\rangle_t$. De plus (comme suggérée par la comparaison avec le cas discret ci-dessus), on a, en probabilité,

$$\langle M, M\rangle_t = \lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^{n} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|^2, \tag{21}$$

où $\sigma = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t)$ est une subdivision de $[0, t]$ de pas $|\sigma| = \max_{0\leq i<n}(t_i - t_{i-1})$.

1.4.1 Martingale 1

Revenons à l'exemple de la martingale

$$M_t = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t \mathscr{L}\varphi(X_s)ds$$

vu au paragraphe (1.3.3). Si $\varphi^2 \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$, alors la variation quadratique de M_t est

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t \big[\mathscr{L}\varphi^2(X_s) - 2\varphi(X_s)\mathscr{L}\varphi(X_s)\big]ds. \tag{22}$$

Remarque 3. *Le processus $\langle M, M\rangle_t$ est bien croissant en t car*

$$\mathscr{L}\varphi^2(x) \geq 2\varphi(x)\mathscr{L}\varphi(x)$$

pour tout $x \in E$. En effet, par l'inégalité de Jensen, on a

$$P_t\varphi^2(x) = \mathbb{E}_x\varphi^2(X_t) \geq |\mathbb{E}_x\varphi(X_t)|^2 = |P_t\varphi(x)|^2.$$

On en déduit, pour $t > 0$,

$$\frac{P_t\varphi^2 - \varphi^2}{t} \geq \frac{|P_t\varphi|^2 - \varphi^2}{t} = (P_t\varphi + \varphi)\frac{P_t\varphi - \varphi}{t}. \tag{23}$$

Si φ et $\varphi^2 \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$, alors le membre de gauche de (23) tend vers $\mathscr{L}\varphi^2$ tandis que le membre de droite converge vers $2\varphi\mathscr{L}\varphi$.

Preuve de la formule (22) : Admettons que la variation quadratique s'écrit

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t \theta(X_s)ds$$

et cherchons à identifier θ. Comme $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{t+\tau}^2|\mathcal{F}_t) - M_t^2 &= \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{t+\tau}|\mathcal{F}_t) - \langle M, M\rangle_t \\ &= \int_t^{t+\tau} P_{s-t}\theta(X_t)ds.\end{aligned}$$

A la limite $\tau \to 0$, on obtient

$$\theta(X_t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\mathbb{E}(M_{t+\tau}^2|\mathcal{F}_t) - M_t^2}{\tau}. \tag{24}$$

En particulier, à $t = 0$,

$$\theta(x) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\mathbb{E}_x M_\tau^2}{\tau}. \tag{25}$$

On a le développement

$$M_\tau^2 = \varphi^2(X_\tau) + \varphi^2(x) + \mathcal{O}(\tau^2) - 2(\varphi(X_\tau) - \varphi(x)) \int_0^\tau \mathscr{L}\varphi(X_s)ds - 2\varphi(X_\tau)\varphi(x).$$

En effet, on a
$$\left|\int_0^\tau \mathscr{L}\varphi(X_s)ds\right|^2 \le \|\mathscr{L}\varphi\|^2_{C_b(E)}\tau^2.$$
D'autre part, en utilisant l'inégalité
$$|ab| \le \varepsilon\frac{a^2}{2} + \varepsilon^{-1}\frac{b^2}{2}$$
avec $\varepsilon = \tau^{1/2}$, on a
$$\left|\mathbb{E}_x\left[(\varphi(X_\tau) - \varphi(x))\int_0^\tau \mathscr{L}\varphi(X_s)ds\right]\right| \le \tau^{1/2}\mathbb{E}_x\left|\varphi(X_\tau) - \varphi(x)\right|^2 + \mathcal{O}(\tau^{3/2}).$$
Or $\varphi, \varphi^2 \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ implique $\psi^2 \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ où $\psi(y) := \varphi(y) - \varphi(x)$. Par conséquent, on a
$$P_\tau\psi^2(y) = \psi^2(y) + \tau\mathscr{L}\psi^2(y) + \mathcal{O}(\tau^2).$$
En particularisant $y = x$, on obtient $P_\tau\psi^2(x) = \mathcal{O}(\tau)$, et finalement
$$\mathbb{E}_x\left[(\varphi(X_\tau) - \varphi(x))\int_0^\tau \mathscr{L}\varphi(X_s)ds\right] = \mathcal{O}(\tau^{3/2}),$$
si bien que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x M_\tau^2 &= \mathbb{E}_x\varphi^2(X_\tau) + \varphi^2(x) - 2\mathbb{E}_x\varphi(X_\tau)\varphi(x) + \mathcal{O}(\tau^{3/2})\\ &= \tau\mathscr{L}\varphi^2(x) + \varphi^2(x) + \varphi^2(x) - 2\big[\tau\mathscr{L}\varphi(x) + \varphi(x)\big]\varphi(x) + \mathcal{O}(\tau^{3/2})\\ &= \tau\big[\mathscr{L}\varphi^2(x) - 2\varphi(x)\mathscr{L}\varphi(x)\big] + \mathcal{O}(\tau^{3/2}).\end{aligned}$$
On en déduit
$$\theta(x) := \lim_{\tau\to 0}\frac{\mathbb{E}_x M_\tau^2}{\tau} = \mathscr{L}\varphi^2(x) - 2\varphi(x)\mathscr{L}\varphi(x). \tag{26}$$
Notons qu'on peut remonter les implications précédents : en définissant maintenant θ par la formule (26), on montrerait par des calculs analogues à ceux du cas $t = 0$, la formule (24) pour tout $t \ge 0$. On déduit ensuite facilement de (26) la décomposition de M_t^2 en la somme de l'intégrale de 0 à t de $\theta(X_s)$ et d'une martingale. ■

Remarque 4. *Dans le cas du mouvement brownien sur* $\mathbb{R}$ *on a vu que* $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_x^2$. *En prenant* $\varphi(x) = x$, *on a*
$$\mathscr{L}\varphi(x) = 0, \quad \mathscr{L}\varphi^2(x) = 1,$$
et on déduit des résultats précédents le fait bien connu que la variation quadratique du mouvement brownien est $\langle B, B\rangle_t = t$.

Remarque 5. *On peut généraliser les résultats ci-dessus au cas d'une fonction $\varphi(t,x)$ de classe C^1 en temps, continue en x, avec φ et $\partial_t\varphi$ bornées : le processus*

$$M_t = \varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) - \int_0^t \big[\partial_s + \mathscr{L}\big]\varphi(s, X_s)ds$$

est une martingale de variation quadratique

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t \Big\{\big[\partial_s + \mathscr{L}\big]\varphi^2(s, X_s) - 2\varphi(s, X_s)\big[\partial_s + \mathscr{L}\big]\varphi(s, X_s)\Big\}ds. \quad (27)$$

1.4.2 Martingale 2

Revenons ici à l'exemple de la martingale

$$M_t := e^{-\lambda t}\psi(X_t) - \psi(X_0)$$

vu au paragraphe (1.3.4). Rappelons que M_t est une martingale si ψ est vecteur propre de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre λ. On a ici un cas particulier de la situation décrite dans la Remarque 5 avec $\varphi(t,x) = e^{-\lambda t}\psi(x)$. En effet, on a alors

$$\big[\partial_s + \mathscr{L}\big]\varphi(s, X_s) = 0.$$

La variation quadratique de M_t est donc donnée par la formule (27) avec $\varphi(t,x) = e^{-\lambda t}\psi(x)$, à savoir

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t e^{-2\lambda s}\big[\mathscr{L}\psi^2(X_s) - 2\psi(X_s)\mathscr{L}\psi(X_s)\big]ds.$$

2 Limite d'échelle du processus d'exclusion simple à sauts symétriques

2.1 Le processus d'exclusion simple à sauts symétriques

Particules Considérons la situation suivante : soit $L \in \mathbb{N}$ un entier non nul. Soit un nombre de particules $N \leq L$, chacune occupant un site propre $x \in \{0, \dots, L-1\}$. Faisons évoluer les particules de la manière suivante : la particule i située en x tire un temps T_i^1 aléatoire distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1. Au temps $t = T_i^1$, la particule tire un site $y \neq x$ avec une probabilité $p(x,y)$. Elle saute en y si le site y est vide de toute particule. Elle reste en x sinon. Dans tous les cas, elle remet son compteur temps à zéro et tire un nouveau temps T_i^2 aléatoire, indépendant de T_i^1 (et indépendant des temps potentiellement tirés aux autres site), distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1. Une incertitude est liée à la question de vacance ou non d'un site lorsque deux particules sautent en même temps ($T_i^n = T_j^m$ pour un $i \neq j$), mais l'ensemble de ces événements est de probabilité nulle par indépendance des temps T_i^n, T_j^m, $n, m \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$.

On qualifie de processus d'exclusion un tel processus d'évolution (puisque les sauts sont *exclus* si la place prise). Plus précisément, on le qualifie de processus d'exclusion *simple* par distinction avec des processus d'exclusion plus compliqués où, par exemple, la décision d'annulation du saut peut dépendre du nombre total de particules situées entre x et y. On va d'autre part considérer ici le processus d'exclusion simple à sauts symétriques (et au plus proche voisin) pour lequel $p(x, y)$ est non nul si, et seulement si, $|x - y| = 1$, et vaut $\frac{1}{2}$ dans les deux cas $y = x \pm 1$.

Interface Ajoutons d'autre part deux particules fixes aux sites $x = -1$ et $x = L$. On peut alors mettre en correspondance le problème d'évolution des particules avec un problème d'évolution d'interface. Définissons en effet $x \mapsto H_x$ de $\{0, \ldots, L\}$ dans $\mathbb{Z}$ par

$$H_0 = 0 \tag{28}$$

$$|H_{x+1} - H_x| = 1, \tag{29}$$

$$H_{x+1} - H_x = +1 \text{ si une particule est située au site } x, \tag{30}$$

(29) et (30) étant données pour $x \in \{0, \ldots, L-1\}$. Le graphe $x \mapsto H_x$ est vu comme une interface évoluant aléatoirement selon le schéma suivant (voir dessin) : une suite de temps $T_x^0 = 0$, T_x^1, $T_x^2 \ldots$ étant donnés, tels que les incréments $T_x^{n+1} - T_x^n$ pour $\{1, \ldots, L-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, alors au temps $t = T_x^n$, le graphe $y \mapsto H_y$ est remplacé par le graphe $y \mapsto H_y^{(x)}$ où $H_y^x = H_y$ pour $y \neq x$ et

$$H_x^{(x)} = \begin{cases} H_x - 2 & \text{si } H_x = H_{x\pm 1} + 1, \\ H_x + 2 & \text{si } H_x = H_{x\pm 1} - 1, \\ H_x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{31}$$

En somme un coin $\wedge$ en x est transformé en le coin $\vee$ et vice-versa. On peut résumer la définition (31) en introduisant le Laplacien discret Δ défini sur les fonctions $f \colon \{0, \ldots, L\} \to \mathbb{R}$ par

$$\Delta f_x = f_{x+1} + f_{x-1} - 2 f_x, \quad \forall x \in \{1, \ldots, L-1\}. \tag{32}$$

On a alors $H_x^{(x)} = H_x + \Delta H_x$ et

$$H^{(x)} = H + \delta_x \Delta H, \quad \delta_x(y) = \mathbf{1}_{x=y}. \tag{33}$$

Conditions au bord Le nombre N de particules dans le processus d'exclusion simple à sauts symétriques est conservé au cours de l'évolution. De même, dans l'évolution du graphe $H(t)$ on conserve un nombre N d'incréments positifs, et donc $L-N$ d'incréments négatifs. On va considérer (pour simplifier, ce n'est pas nécessaire) le cas

$$L = 2N.$$

Il y a alors autant d'incréments positifs que négatifs dans le graphe de H. Comme $H_0 = 0$, on a alors nécessairement $H_1 = 0$. Par conséquent l'espace des états du processus $H(t)$ est

$$E_L = \{H \colon \{0,\dots,L\} \to \mathbb{R}; H_0 = H_L = 0; |H_{x+1} - H_x| = 1\}.$$

On muni E_L de la topologie induite par $\mathbb{R}^{L-1}$ muni de la norme euclidienne (avec un facteur d'échelle) :

$$\|H\| = \left[L^{-3} \sum_{x=1}^{L-1} |H_x|^2\right]^{1/2}.$$

Générateur Soit N_t^x la fonction aléatoire de comptage en x :

$$N_t^x = \mathrm{Card}\big\{n \geq 1; T_x^n \leq t\big\},$$

qui donne le nombre d'actions qui ont concerné le site x avant le temps $t \geq 0$. On rappelle que N_t^x suit une loi de Poisson de paramètre λt où λ est le paramètre de la loi exponentielle des $T_x^{n+1} - T_x^n$, pris égal à 1 ici. On a donc

$$\mathbb{P}(N_t^x = 0) = e^{-t} = 1 - t + \mathcal{O}(t^2), \quad \mathbb{P}(N_t^x = 1) = te^{-t} = t + \mathcal{O}(t^2),$$

et $\mathbb{P}(N_t^x \geq 2) = \mathcal{O}(t^2)$. Par indépendance, on a aussi

$$\mathbb{P}(N_t^x = 1 \,\&\, N_t^y = 1) = \mathcal{O}(t^2),$$

pour $x \neq y$. Introduisons les événements

$$A = \{N_t^y = 0, \forall y\}, \quad B_x = \{N_t^x = 1 \,\&\, N_t^y = 0, \forall y \neq x\}.$$

Si C est le complémentaire de $A \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{L-1}$, alors $\mathbb{P}(C) = \mathcal{O}(t^2)$ par les calculs ci-dessus. D'autre part, par indépendance,

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{y=1}^{L-1} \mathbb{P}(N_t^y = 0) = 1 - (L-1)t + \mathcal{O}(t^2),$$

et

$$\mathbb{P}(B_x) = \mathbb{P}(N_t^x = 1) \prod_{y \neq x} \mathbb{P}(N_t^y = 0) = t + \mathcal{O}(t^2).$$

On en déduit, pour $\varphi \in C_b(E_L)$ et $H \in E_L$,

$$\begin{aligned}
P_t\varphi(H) &= \mathbb{E}\varphi(H(t)) \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A\varphi(H(t)) + \sum_{x=1}^{L-1}\mathbf{1}_{B_x}\varphi(H(t)) + \mathbf{1}_C\varphi(H(t))\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A\varphi(H) + \sum_{x=1}^{L-1}\mathbf{1}_{B_x}\varphi(H+\delta_x\Delta H)\Big] + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \mathbb{P}(A)\varphi(H) + \sum_{x=1}^{L-1}\mathbb{P}(B_x)\varphi(H+\delta_x\Delta H) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \varphi(H) + t\sum_{x=1}^{L-1}\big[\varphi(H+\delta_x\Delta H) - \varphi(H)\big] + \mathcal{O}(t^2).
\end{aligned}$$

Par conséquent le générateur du processus $(H(t))$, qui a pour domaine $C_b(E_L)$, est donné par

$$\mathscr{L}\varphi(H) = \sum_{x=1}^{L-1}\big[\varphi(H+\delta_x\Delta H) - \varphi(H)\big]. \tag{34}$$

Supposons qu'on ajoute maintenant la condition suivante dans la description de l'évolution : à chaque temps $t = T_x^n$ on tire un pile ou face (de manière indépendante de tous les autres tirages). Si pile on effectue la transformation $H \mapsto H^{(x)}$, si face on ne fait rien. Quel est le générateur de ce nouveau processus ? Pour le déterminer on va reprendre les calculs ci-dessus en remplaçant B_x par

$$\tilde{B}_x = B_x \cap \{\text{obtention de pile au tirage au temps } t = T_x^1\}.$$

Par indépendance, on a $\mathbb{P}(\tilde{B}_x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_x)$. L'événement A, réalisé lorsqu'aucune transition n'a eu lieu, en aucun site, s'écrit maintenant

$$\tilde{A} = \bigcap_{y=1}^{L-1}\tilde{A}_y, \quad \tilde{A}_y = \bigcup_{i\geq 0}\tilde{A}_y^{(i)},$$

où $\tilde{A}_y^{(i)}$ est l'événement "$N_t^y = i$ et face a été obtenu à chacun des tirages $1,\ldots,i$". On a alors indépendance des événements $\tilde{A}_y^{(i)}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{A}_y^{(0)}) &= \mathbb{P}(N_t^y = 0) = 1 - t + \mathcal{O}(t^2), \\
\mathbb{P}(\tilde{A}_y^{(1)}) &= \mathbb{P}(N_t^y = 1 \ \&\ \text{obtention de face au tirage au temps } t = T_y^1) \\
&= \frac{t}{2} + \mathcal{O}(t^2), \\
\mathbb{P}(\tilde{A}_y^{(2)} \cup \cdots) &= \mathcal{O}(t^2),
\end{aligned}$$

si bien que $\mathbb{P}(\tilde{A}_y) = 1 - \frac{t}{2} + \mathcal{O}(t^2)$, $\mathbb{P}(\tilde{A}) = 1 - \frac{L-1}{2}t + \mathcal{O}(t^2)$ et le générateur du processus considéré est

$$\mathscr{L}\varphi(H) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{L-1}\left[\varphi(H + \delta_x \Delta H) - \varphi(H)\right]. \tag{35}$$

2.2 Limite d'échelle

Soit $r \mapsto h_{\text{in}}(r)$ (indice "in" pour "initial") une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $h_{\text{in}}(r) = 0$ pour $r = 0$ et $r = 1$. On suppose de plus que h_{in} est 1-Lipschitzienne. Soit $H_{\text{in}} \in E_L$ une donnée initiale pour l'évolution aléatoire de l'interface proche de h_{in}, au sens où

$$H_{\text{in},x} = L h_{\text{in}}\left(\frac{x}{L}\right)(1 + o(1)), \text{ uniformément en } x \in \{0, \dots, L\}. \tag{36}$$

On peut construire à partir de h_{in} une fonction $H_{\text{in}} \in E_L$ satisfaisant (36) de la manière suivante. Remarquons d'abord que, pour $H \in E_L$, la condition que le graphe de H part de l'origine puis évolue de façon affine par morceaux avec pentes ± 1 contraint H_x à prendre ses valeurs dans $2\mathbb{Z}$ si x est pair et dans $2\mathbb{Z}+1$ si x est impair (en résumé H_x a la même parité que x). Pour déterminer H_{in} on constitue donc un réseau de points

$$\mathscr{R} = \{(x, H); 0 \le x \le L, H \in \mathbb{Z}_x\},$$

où $\mathbb{Z}_x = 2\mathbb{Z}$ si x pair, $\mathbb{Z}_x = 2\mathbb{Z}+1$ si x impair. On trace le graphe G_L de

$$x \mapsto L h_{\text{in}}\left(\frac{x}{L}\right),$$

pour $x \in [0, L]$ puis, à chaque x entier, on choisit (x, H_x) comme le point du réseau $\mathscr{R}$ le plus proche de G_L satisfaisant la contrainte de rester sous G_L. Observer qu'on procède de même lorsqu'on définit la partie entière $\lfloor r \rfloor$ d'un réel r. On a d'ailleurs les formules suivantes :

$$H_{\text{in}}(x) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{L}{2} h_{\text{in}}\left(\frac{x}{L}\right)\rfloor & \text{si } x \in 2\mathbb{Z}, \\ 2\lfloor \frac{L}{2} h_{\text{in}}\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2}\rfloor + 1 & \text{si } x \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases} \tag{37}$$

Alors l'interface H_{in} ainsi construit satisfait les conditions au bord $H_{\text{in}}(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = L$ et l'estimation

$$\sup_{x \in \{0,\dots,L\}} \left| H_{\text{in}}(x) - L h_{\text{in}}\left(\frac{x}{L}\right) \right| \le 1, \tag{38}$$

qui implique (36). Soit maintenant $H(t)$ le processus (interface aléatoire) évoluant comme décrit dans le paragraphe 2.1 ci-dessus. On note

$$h^L(r,t) = \frac{1}{L} H_{\lfloor rL \rfloor}(L^2 t) \tag{39}$$

le processus remis à l'échelle. Soit $h(t,r)$ la solution de l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec conditions au bord de Dirichlet et donnée initiale h_{in} :

$$\partial_t h - \frac{1}{2}\partial^2_{rr} h = 0 \text{ dans }]0,+\infty[\times]0,1[, \tag{40}$$

$$h(t,r) = 0 \text{ pour } (t,r) \in]0,+\infty[\times(\{0\}\cup\{1\}), \tag{41}$$

$$h(0,r) = h_{\text{in}}(r) \text{ pour } r \in]0,1[. \tag{42}$$

On veut démontrer le résultat suivant.

Théorème 6. *Soit $h_{\text{in}} \in H^2(0,1)$ une fonction 1-Lipschitzienne sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et 1. Soit $h \in C(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(0,1))$ l'unique solution de (40)-(41)-(42). Soit $H_{\text{in}} \in E_L$ proche de h_{in} au sens de la condition (36), soit $H(t)$ l'interface en évolution aléatoire à partir de H_{in} selon le processus de Markov de générateur (35). Soit h^L le processus remis à l'échelle (39). Alors h^L tend vers h en probabilité lorsque L tend vers $+\infty$ au sens où, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{L\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T],r\in[0,1]} |h^L(t,r) - h(t,r)| > \varepsilon\right) = 0. \tag{43}$$

On fait la preuve du théorème dans le paragraphe (2.4). Dans le paragraphe 2.3, on commence par introduire quelques outils et calculs qui seront utiles dans la suite.

Remarque : on suppose $h_{\text{in}} \in H^2(0,1)$, mais $h \in H^{1+\varepsilon}(0,1)$ suffirait.

Remarque : dans [LST14] est démontré que la limite d'échelle du modèle d'Ising dans certaines conditions est un mouvement par courbure moyenne anisotropique (voir l'introduction du papier pour plus de détails). Le résultat du Théorème 6 est une des briques élémentaires de la preuve.

2.3 Outils, calculs

Produit scalaire On munit $L^2(0,1)$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(r)\bar{g}(r)dr.$$

On munit d'autre part E_L du produit scalaire

$$[H,G] = \frac{1}{L^3}\sum_{x=1}^{L-1} H_x \bar{G}_x.$$

On a une isométrie (d'espaces de Hilbert) $j\colon E_L \to L^2(0,1)$ définie par

$$jH(r) = \frac{1}{L} H_{\lfloor Lr \rfloor}. \tag{44}$$

En effet, pour $H, G \in E_L$, on calcule

$$\begin{aligned}\langle jH, jG\rangle_{L^2} &= \sum_{x=0}^{L-1} \int_{\frac{x}{L}}^{\frac{x+1}{L}} jH(r)\bar{j}G(r)dr \\ &= \sum_{x=0}^{L-1} \frac{1}{L^3} H_x \bar{G}_x = [H, G]. \end{aligned} \tag{45}$$

Carré du champ Soit maintenant $\varphi \in C_b(E_L)$ une application *linéaire* : il existe $G \in E_L$ tel que $\varphi(H) = [H, G]$ pour tout $H \in E_L$. On a alors

$$\mathscr{L}\varphi(H) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{L-1}[\delta_x \Delta H, G] = \frac{1}{2}[\Delta H, G],$$

et comme Δ est auto-adjoint pour $[\cdot, \cdot]$ (vérification facile), on obtient

$$\mathscr{L}\varphi(H) = \frac{1}{2}[\Delta H, G] = \frac{1}{2}[H, \Delta G]. \tag{46}$$

On peut d'autre part calculer, en supposant G à valeurs réelles,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\varphi^2(H) &= \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{L-1}[H + \delta_x \Delta H, G]^2 - [H, G]^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{L-1}[2H + \delta_x \Delta H, G][\delta_x \Delta H, G] \\ &= \frac{1}{2}L^{-6}\sum_{x,y,z=1}^{L-1}(2H_y + \delta_{xy}\Delta H_y)G_y \delta_{xz}\Delta H_z G_z \\ &= \frac{1}{2}L^{-6}\sum_{x,y=1}^{L-1}(2H_y + \delta_{xy}\Delta H_y)G_y \Delta H_x G_x \\ &= \frac{1}{2}L^{-6}\sum_{x,y=1}^{L-1} 2H_y G_y \Delta H_x G_x + \frac{1}{2}L^{-6}\sum_{x=1}^{L-1}\Delta H_x G_x \Delta H_x G_x \\ &= [H, G][\Delta H, G] + \frac{1}{2}L^{-3}[|\Delta H|^2, |G|^2].\end{aligned}$$

En particulier, d'après (46), on a

$$\mathscr{L}\varphi^2(H) - 2\varphi(H)\mathscr{L}\varphi(H) = \frac{1}{2}L^{-3}[|\Delta H|^2, |G|^2]. \tag{47}$$

2.4 Comportement aux grandes échelles de l'interface aléatoire : preuve du Théorème 6

Moyenne Soit $\overline{H}(t) = \mathbb{E}H(t)$. Quelle est l'évolution de $\overline{H}$? Si $G \in E_L$, on a

$$[\overline{H}(t), G] = \mathbb{E}[H(t), G] = P_t\varphi(H(t)),$$

où φ est l'application linéaire $H \mapsto [H, G]$. D'après (46), on a

$$\frac{d}{dt}[\overline{H}(t), G] = P_t\mathscr{L}\varphi(H(t)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\Delta H(t), G] = \frac{1}{2}[\Delta\overline{H}(t), G].$$

Cela étant vrai pour tout $G \in E_L$, on a l'équation (48) dans (48)-(49)-(50) ci-dessous

$$\partial_t\overline{H} - \frac{1}{2}\Delta\overline{H} = 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times\{1, \dots, L-1\}, \tag{48}$$

$$\overline{H}_x(t) = 0 \text{ pour } (t, x) \in]0, +\infty[\times(\{0\} \cup \{L\}), \tag{49}$$

$$\overline{H}_x(0) = H_{\text{in},x} \text{ pour } x \in \{1, \dots, L-1\}. \tag{50}$$

Les conditions au bord (49) et initiales (50) sont vérifiées en appliquant $\mathbb{E}$ aux conditions vérifiées par $H(t)$. On a le résultat suivant

Lemme 7. *Soit $h_{\text{in}} \in H^2(0,1)$ une fonction 1-Lipschitzienne sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et 1. Soit $h \in C(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(0,1))$ l'unique solution de (40)-(41)-(42). Soit $H_{\text{in}} \in E_L$ satisfaisant (36). Soit $\overline{H}$ la solution de (48)-(49)-(50) et soit $\bar{h}^L$ la solution remise à l'échelle*

$$\bar{h}^L(t, r) = \frac{1}{L}\overline{H}_{\lfloor Lr \rfloor}(L^2 t), \quad t \geq 0,\ r \in [0,1]. \tag{51}$$

On a alors

$$\lim_{L\to+\infty} \|\bar{h}^L - h\|_{C([0,T]\times[0,1])} = 0, \tag{52}$$

où $\|h\|_{C([0,T]\times[0,1])}$ est la norme du sup sur $[0,T] \times [0,1]$.

Remarquer que le lemme 7 est déterministe (et que c'est un résultat d'analyse numérique). On admet provisoirement ce résultat. Pour démontrer la convergence (43), il suffit donc de montrer la convergence de $h^L - \bar{h}^L$ vers 0 dans $C([0,T] \times [0,1])$, en probabilité. Pour cela on utilise le résultat suivant :

Lemme 8. *Pour tout $t \geq 0$, la fonction $r \mapsto (h^L - \bar{h}^L)(t, r)$ est 2-Lipschitzienne et, pour tout $a > 0$, on a*

$$\|(h^L - \bar{h}^L)(t, \cdot)\|_{C([0,1])} \geq a \Rightarrow \|(h^L - \bar{h}^L)(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)} \geq \frac{a^2}{4}. \tag{53}$$

Preuve du Lemme 8 : la condition (29) implique que, presque sûrement, la fonction $r \mapsto h^L(t,r)$ est 1-Lipschitzienne. En passant à la moyenne (espérance $\mathbb{E}$), on en déduit que $r \mapsto \bar{h}^L(t,r)$ est 1-Lipschitzienne. Par conséquent $f \colon r \mapsto (h^L - \bar{h}^L)(t,r)$ est 2-Lipschitzienne. On a de plus $f(0) = 0$ si bien que

$$f^2(r) = 2\int_0^1 f'(s)f(s)ds \le 2\|f'\|_{L^2(0,1)}\|f\|_{L^2(0,1)} \le 4\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

En particulier, on a

$$\|f\|^2_{C([0,1])} \le 4\|f\|_{L^2(0,1)}, \tag{54}$$

ce qui implique (53). ■

Pour montrer la convergence de $h^L - \bar{h}^L$ vers 0 dans $C([0,T]\times[0,1])$, en probabilité, il suffit donc de démontrer la proposition suivante.

Proposition 9. *Soit $h_{\text{in}} \in H^2(0,1)$ une fonction 1-Lipschitzienne sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et 1. Soit $H_{\text{in}} \in E_L$ satisfaisant (36), soit $H(t)$ l'interface en évolution aléatoire à partir de H_{in} selon le processus de Markov de générateur (35). Soit h^L le processus remis à l'échelle (39) et soit $\bar{h}^L = \mathbb{E}h^L$. Alors $h^L - \bar{h}^L$ tend vers 0 en probabilité lorsque L tend vers $+\infty$ au sens suivant : pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{L\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \|h^L(t,\cdot) - \bar{h}^L(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} > \varepsilon\right) = 0. \tag{55}$$

Décomposition spectrale Pour prouver le Lemme 7, ainsi que pour prouver la proposition 9, on va utiliser une approche par décomposition spectrale. Rappelons d'abord cette décomposition dans le cas continu : l'opérateur Laplacien en dimension 1, noté $-\partial_x^2$, de domaine

$$\mathcal{D}(-\partial_x^2) = \left\{h \in H^2(0,1); h(0) = h(1) = 0\right\}$$

admet la base de fonctions propres

$$a^k(r) = \sqrt{2}\sin(\pi k r), \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{56}$$

Les valeurs propres associées à $-\frac{1}{2}\partial_x^2$ sont les $\mu_k = \frac{1}{2}\pi^2 k^2$. La complétude du système $\{a^k\}$ se démontre en considérant les fonctions de carré intégrable 2-périodiques impaires par rapport à $r = 1$ (tout $h \in \mathcal{D}(-\partial_x^2)$ peut être étendu en une telle fonction). La solution h du problème (40)-(41)-(42) est alors donnée par

$$h(t) = \sum_{k\ge1} e^{-\mu_k t}\langle h_{\text{in}}, a^k\rangle_{L^2(0,1)} a^k, \quad \forall t \ge 0. \tag{57}$$

L'opérateur Laplacien discret $-\frac{1}{2}\Delta$ (attention au signe "moins"), défini de E_L dans E_L est autoadjoint pour $[\cdot,\cdot]$ et admet une base de fonctions propres

$$A^k\colon x \mapsto \sqrt{2}L \sin\left(\pi k \frac{x}{L}\right), \quad k = 1, \ldots, L-1,$$

associées aux valeurs propres

$$\nu_k = 1 - \cos\left(\frac{\pi k}{L}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi k}{2L}\right)$$

La solution $\overline{H}$ de l'équation de la chaleur discrète (48)-(49)-(50) est alors

$$\overline{H}(t) = \sum_{k=1}^{L-1} e^{-\nu_k t}[H_{\mathrm{in}}, A^k]A^k. \tag{58}$$

En particulier, on a, pour la fonction remise à l'échelle,

$$\begin{aligned}\bar{h}^L(t,r) &= \sum_{k=1}^{L-1} e^{-L^2\nu_k t}[H_{\mathrm{in}}, A^k]\frac{1}{L}A^k_{\lfloor Lr\rfloor} \\ &= \sum_{k=1}^{L-1} e^{-L^2\nu_k t}\langle jH_{\mathrm{in}}, jA^k\rangle_{L^2(0,1)} jA^k(r),\end{aligned} \tag{59}$$

en utilisant l'identité (45).

2.4.1 Preuve partielle du Lemme 7

On va se contenter dans cette partie de comparer les décompositions spectrales (57) et (58) de h et $\bar{h}^L$ respectivement (voir le dernier paragraphe B pour les arguments manquants). On rappelle les inégalités

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x, \quad |\sin(x) - x| \leq x^3, \tag{60}$$

pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. De (60), on déduit

$$\frac{4}{\pi^2}\mu_k \leq L^2\nu_k \leq \mu_k, \quad \mu_k - L^2\nu_k \leq C\frac{k^3}{L}, \tag{61}$$

pour une certaine constante C, pour tout $k \in \{1, \cdots, L-1\}$.

La fonction h_{in} étant 1-Lipschitzienne, on a

$$|\langle h_{\mathrm{in}}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}| \leq \frac{C}{k} \tag{62}$$

où C est une constante numérique. En effet, en notant $b^k(r) = \sqrt{2}\cos(\pi k r)$, on a

$$\begin{aligned}
|\langle h_{\rm in}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}| &= \frac{1}{\pi k}|\langle h_{\rm in}, \partial_r b^k\rangle_{L^2(0,1)}| \\
&= \frac{1}{\pi k}|\langle \partial_r h_{\rm in}, b^k\rangle_{L^2(0,1)}| \\
&\leq \frac{1}{\pi k}\|\partial_r h_{\rm in}\|_{L^2(0,1)}\|b^k\|_{L^2(0,1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi k}\|\partial_r h_{\rm in}\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi k}.
\end{aligned}$$

On a une propriété analogue pour les coefficients $[H_{\rm in}, A^k]$, à savoir

$$[H_{\rm in}, A^k] \leq \frac{C}{k} \tag{63}$$

où C est une constante numérique. On démontre (63) à l'aide d'une intégration par parties discrète :

$$[H_{\rm in}, A^k] = \frac{1}{L^2}\sum_{x=1}^{L-1}[H_{{\rm in},x} - H_{{\rm in},x-1}]\, B_x^k, \quad B_x^k := \sum_{y=x}^{L-1} A_y^k.$$

On a en effet $|H_{{\rm in},x} - H_{{\rm in},x-1}| = 1$ et

$$\begin{aligned}
|B_x^k| &= \sqrt{2}\left|\operatorname{Im}\sum_{y=x}^{L-1} e^{i\pi k\frac{y}{L}}\right| \\
&\leq \sqrt{2}\left|\frac{1 - e^{i\pi k\frac{L-x}{L}}}{1 - e^{i\pi k\frac{1}{L}}}\right| \leq C\frac{L}{k}
\end{aligned}$$

Noter enfin que l'hypothèse $h_{\rm in} \in H^2(0,1)$ implique

$$\langle h_{\rm in}, a^k\rangle_{L^2(0,1)} = \frac{1}{\pi^2 k^2}\langle \partial_r^2 h_{\rm in}, a^k\rangle_{L^2(0,1)},$$

d'où

$$\sum_{k\geq 1} k^4|\langle h_{\rm in}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}|^2 \leq C, \tag{64}$$

où C est une constante numérique.

2.4.2 Preuve de la Proposition 9

Rappelons que $h^L = jH$ et $\bar{h}^L = j\overline{H}$. D'après l'isométrie (45), et en utilisant la base A^k de E_L, on a

$$\|h^L(t,\cdot) - \bar{h}^L(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} = \sum_{k=1}^{L-1}[H(L^2t) - \overline{H}(L^2t), A^k]^2. \tag{65}$$

On analyse maintenant le comportement des processus

$$\alpha_t^k := [H(L^2t) - \overline{H}(L^2t), A^k] = \beta_t^k - \mathbb{E}\beta_t^k, \quad \beta_t^k := [H(L^2t), A^k]. \tag{66}$$

On a d'une part, presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$,

$$|\alpha_t^k| \leq \frac{C}{k} \tag{67}$$

où C est une constante numérique. On démontre (67) de manière similaire à l'estimation (63) en utilisant le fait que les incréments de $H(t)$ et $\overline{H}(t)$ valent 1, uniformément en t. On a d'autre part le résultat suivant.

Lemme 10. *Soit $0 < \theta < 1/2$ et soit F_L l'événement*

$$|\alpha_t^k| \leq L^{-\theta} \text{ pour tout } k \leq (\log(L))^{1/3} \text{ et pour tout } t \leq L^2T. \tag{68}$$

Alors $\lim_{L\to+\infty} \mathbb{P}(F_L) = 1$.

Admettons le Lemme (10) pour l'instant. Si F_L est vrai, alors

$$\sup_{t\in[0,T]} \|h^L(t,\cdot) - \bar{h}^L(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} \tag{69}$$

$$= \sum_{k=1}^{L-1} \sup_{t\in[0,L^2T]} |\alpha_t^k|^2 \tag{70}$$

$$= \sum_{1\leq k\leq(\log(L))^{1/3}} \sup_{t\in[0,L^2T]} |\alpha_t^k|^2 + \sum_{(\log(L))^{1/3}<k<L} \sup_{t\in[0,L^2T]} |\alpha_t^k|^2. \tag{71}$$

Par (67), la deuxième somme se majore par

$$\sum_{(\log(L))^{1/3}<k<L} \frac{C^2}{k^2} \leq \int_{(\log(L))^{1/3}/2}^{\infty} \frac{C^2}{z^2} dz \leq C(\log(L))^{-1/3},$$

où C est une constante numérique. Dautre part, d'après la définition (68) de F_L, on a

$$\sum_{1\leq k\leq(\log(L))^{1/3}} \sup_{t\in[0,L^2T]} |\alpha_t^k|^2 \leq (\log(L))^{1/3} L^{-2\theta}$$

Par conséquent, si F_L est vrai, alors

$$\sup_{t\in[0,T]} \|h^L(t,\cdot) - \bar{h}^L(t,\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} < \varepsilon$$

pour L assez grand. On en déduit la convergence en probabilité énoncée dans la Proposition 9. ∎

Preuve du Lemme 10 : on applique les résultats des paragraphes 1.4.1 et 1.4.2. En effet $\beta_t^k = \varphi(H(t))$ où φ est l'application de $C_b(E_L)$ définie par $\varphi(H) = [H, A^k]$. D'après (46), et le fait que A^k est vecteur propre de $-\frac{1}{2}\Delta$ associé à la valeur propre ν_k, φ est valeur propre de $\mathscr{L}$ associé à la valeur propre ν_k. Par conséquent $M_t := e^{\nu_k t}\beta_t^k - \beta_0^k$ est une martingale. Sa variation quadratique est

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t e^{2\nu_k s}\big[\mathscr{L}\varphi^2(H(s)) - 2\varphi(H(s))\mathscr{L}\varphi(H(s))\big]ds.$$

D'après (47), on a

$$\langle M, M\rangle_t = \frac{1}{2}L^{-3}\int_0^t e^{2\nu_k s}[|\Delta H(s)|^2, |A^k|^2]ds.$$

Comme $|\Delta H_x| \leq 2$ pour tout $x \in \{1, \dots, L-1\}$, tout $H \in E_L$, on a

$$[|\Delta H(s)|^2, |A^k|^2] \leq 4[1, |A^k|^2] = 4[A^k, A^k] = 4.$$

Par conséquent

$$\langle M, M\rangle_t \leq 2L^{-3}\int_0^t e^{2\nu_k s}ds \leq \frac{e^{2L^2\nu_k T}}{L^3\nu_k}. \tag{72}$$

Par l'inégalité de Doob (4), on a, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq L^2T}|M_t| > a\right) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}|M_{L^2T}|^2.$$

Or $\mathbb{E}|M_t|^2 = \langle M, M\rangle_t$ pour tout t, donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq L^2T}|M_t| > a\right) \leq \frac{e^{2L^2\nu_k T}}{a^2L^3\nu_k}.$$

La quantité à estimer $\alpha_t^k = \beta_t^k - \mathbb{E}\beta_t^k$, qui s'exprime en fonction de M_t comme

$$\alpha_t^k = e^{-\nu_k t}(M_t + \beta_0^k) - \mathbb{E}\big[e^{-\nu_k t}(M_t + \beta_0^k)\big] = e^{-\nu_k t}M_t,$$

en utilisant le fait que $\mathbb{E}\beta_0^k = \beta_0^k$ et $\mathbb{E}M_t = 0$, satisfait

$$\sup_{0\leq t\leq L^2T}|\alpha_t^k| \leq \sup_{0\leq t\leq L^2T}|M_t|.$$

On a donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq L^2T}|\alpha_t^k| > L^{-\theta}\right) \leq \frac{e^{2L^2\nu_k T}}{L^{3-2\theta}\nu_k}.$$

En utilisant l'inégalité $|\sin(x)| \geq \frac{2}{\pi}|x|$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, on a $\nu_k \geq 2\frac{k^2}{L^2}$, et

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq L^2T} |\alpha_t^k| > L^{-\theta}\right) \leq \frac{e^{2L^2\nu_k T}}{2L^{1-2\theta}k^2}.$$

D'autre part, l'estimation (61), qui donne $|L^2\nu_k - \pi^2k^2| \leq C\frac{\log(L)}{L}$ pour $k \leq (\log(L))^{1/3}$ montre que, pour L assez grand, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq L^2T} |\alpha_t^k| > L^{-\theta}\right) \leq \frac{e^{2\pi^2Tk^2}}{L^{1-2\theta}k^2},$$

pourvu que $k \leq (\log(L))^{1/3}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_L^c) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq k\leq(\log(L))^{1/3}} \left\{\sup_{0\leq t\leq L^2T} |\alpha_t^k| > L^{-\theta}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{1\leq k\leq(\log(L))^{1/3}} \frac{e^{2\pi^2Tk^2}}{L^{1-2\theta}k^2}.
\end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto \frac{e^{2\pi^2Ts}}{s}$ est croissante sur $[(2\pi^2T)^{-1}, +\infty[$. Par monotonie intégrale et changement de variable $u = t^{-1}$, on a donc l'estimation

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_L^c) &\leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^{1-2\theta}}\right) + \frac{1}{L^{1-2\theta}} \int_{(\pi^2T)^{-1}}^{2(\log(L))^{1/3}} \frac{e^{2\pi^2Tt^2}}{t^2} dt \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^{1-2\theta}}\right) + \frac{1}{L^{1-2\theta}} \int_{(\log(L))^{-1/3}/2}^{\pi^2T} e^{2\pi^2T/u} du \\
&\leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^{1-2\theta}}\right) + \frac{\pi^2Te^{4\pi^2T(\log(L))^{1/3}}}{L^{1-2\theta}} \\
&= \mathcal{O}\left(e^{4\pi^2T(\log(L))^{1/3}-(1-2\theta)\log(L)}\right) = o(1).
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat. ∎

3 Limite d'échelle d'une interface évoluant aléatoirement en interaction avec une paroi répulsive

3.1 Modèle

Dans le modèle que l'on va décrire, l'espace des états est

$$E_L^+ = \{H \in E_L; H_x \geq 0, \ \forall x \in \{0, \dots, L\}\}.$$

L'évolution est la même que celle décrite au paragraphe 2.1, aux exceptions suivantes près :

1. si $H_{x\pm1} = 0$, on annule la transformation $H \mapsto H^{(x)}$, cela afin de conserver la positivité de $x \mapsto H_x$ au cours de l'évolution,
2. si $H_{x\pm1} = 1$, la transformation $H \mapsto H^{(x)}$ n'est pas opérée systématiquement, mais seulement avec les probabilités suivantes :
   (a) probabilité $p_\uparrow(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$ si $H_x = H_{x\pm1} - 1$,
   (b) probabilité $p_\downarrow(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ si $H_x = H_{x\pm1} + 1$.

La situation considérée est l'évolution d'une interface aléatoire en présence d'une paroi. Le paramètre $\lambda \geq 0$ détermine la nature de la paroi. Si $0 \leq \lambda \leq 1$, la paroi est répulsive. Si $2 \leq \lambda \leq +\infty$, la paroi est attractive.

Dans cette partie on va démontrer le résultat suivant :

Théorème 11 (Limite aux grandes échelles, cas $0 \leq \lambda \leq 1$)**.** *On suppose $0 \leq \lambda \leq 1$. Soit $h_{\rm in}$ une fonction 1-Lipschitzienne sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et 1. Soit $h \in C(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}_+; H^1(0,1))$ l'unique solution de (40)-(41)-(42). Soit $H_{\rm in} \in E_L$ proche de $h_{\rm in}$ au sens de la condition (36), soit $H(t)$ l'interface en évolution aléatoire à partir de $H_{\rm in}$ selon le processus de Markov décrit en 1-2 ci-dessus. Soit h^L le processus remis à l'échelle (39). Alors h^L tend vers h en probabilité lorsque L tend vers $+\infty$ au sens où, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{L\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T],r\in[0,1]} |h^L(t,r) - h(t,r)| > \varepsilon\right) = 0. \tag{73}$$

Remarque : le résultat est encore vrai pour $1 \leq \lambda < 2$, voir [Lac14]. Dans ce cas la paroi est attractive, mais pas assez pour contrarier l'évolution aléatoire de l'interface selon une évolution proche de celle donnée par (40)-(41)-(42). Si $\lambda > 2$, il est attendu que l'effet de la paroi modifie l'équation aux grandes échelles. Dans le cas extrême $\lambda = +\infty$, la paroi est collante (si $H_x(t) = 0$ pour un x donné et un $t \geq 0$, alors $H_x(s) = 0$ pour tout $s \geq t$) et Hubert Lacoin montre que la limite d'échelle est solution d'un problème de Stefan (voir [Lac14] pour les détails).

3.2 Couplage et monotonie

Dans cette partie, on va décrire une manière de simuler la dynamique décrite en 1-2 au paragraphe 3.1, qui de surcroît permet de coupler et comparer les dynamiques de l'évolution libre et de l'évolution avec paroi et les évolutions avec paroi pour différentes valeurs de λ (voir Section 2.2.1 dans [CMT08]).

Soit donnés des processus de poissons $(T^n_x)_{n\geq1}$ et des variables aléatoires uniformes $(U^n_x)_{n\geq1}$ en chaque site $x \in \{1,\dots,L-1\}$, qu'on suppose collectivement indépendantes. Pour simuler le processus d'évolution de l'interface en présence de la paroi, on procède ainsi : en un site x donné, le temps $t = T^n_x$ étant venu, on effectue les opérations suivantes :

1. si $H_{x\pm1} = 0$, on ne fait rien,
2. si $H_{x\pm1} > 1$, on tire U_x^n et on remplace H_x par $H_x + \Delta H_x$ si $0 \leq U_x^n \leq \frac{1}{2}$ (rien si $U_x^n > \frac{1}{2}$),
3. si $H_{x\pm1} = 1$, on tire U_x^n et on remplace H_x par $H_x + \Delta H_x$ si
   (a) $\Delta H_x = -2$ et $0 \leq U_x^n \leq p_\uparrow(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$,
   (b) $\Delta H_x = +2$ et $0 \leq U_x^n \leq p_\downarrow(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Il est clair que ce procédé fournit en effet une simulation de la dynamique d'évolution de l'interface. On peut d'autre part coupler (c'est-à-dire faire évoluer selon des lois de hasard couplées) différentes dynamiques, et en déduire les résultats suivants :

1. **Comparaison :** si $H(0) \leq \hat{H}(0)$ au sens où $H_x(0) \leq \hat{H}_x(0)$ pour tout $x \in \{1, \ldots, L-1\}$, alors $H(t) \leq \hat{H}(t)$ pour tout $t \geq 0$,
2. **Intensité en λ :** si $\hat{\lambda} \leq \lambda$ et $H(0) \leq \hat{H}(0)$, alors $H(t) \leq \hat{H}(t)$ pour tout $t \geq 0$ (on dit que l'évolution avec paramètre $\hat{\lambda}$ domine l'évolution avec paramètre λ),
3. **Evolution avec et sans paroi :** l'évolution à $\lambda = 1$ domine l'évolution libre.

Noter que le point 1 est contenu dans le point 2 (cas $\lambda = \hat{\lambda}$).

3.3 Borne par au-dessus

Dans cette partie, on montre le résultat suivant.

Proposition 12. *On suppose $\lambda \geq 0$. Soit $h_{\text{in}} \in H^2(0,1)$ une fonction 1-Lipschitzienne positive sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et 1. Soit $H_{\text{in}} \in E_L^+$ satisfaisant (36), soit $H(t)$ l'interface en évolution aléatoire à partir de H_{in} selon le processus donné au paragraphe 3.2. Soit h^L le processus remis à l'échelle (39) et soit*

$$h \in C(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(0,1))$$

l'unique solution de (40)-(41)-(42). Alors, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'événement

$$h^L(t,r) \leq h(t,r) + \varepsilon, \quad \forall t \in [0,T], \ r \in [0,1], \tag{74}$$

a une probabilité proche de 1 lorsque L est grand.

Noter qu'il n'y a pas de restriction sur la valeur de λ ici. Pour montrer la Proposition 12, on aura besoin du résultat suivant.

Lemme 13. *Soit $T > 0$. Soit $H(t)$ solution de l'évolution libre de générateur (35) partant d'un profil $H(0) \geq A$ où A est le profil*

$$A_x = \min(x, L - x, L^{3/4}).$$

Alors l'événement :

$$\exists t \in [0, L^2 T], \ \exists x \in \{1, \dots, L-1\}, \ H_x(t) \leq -L^{3/4},$$

a une probabilité presque nulle lorsque L est grand.

Preuve du Lemme 13 : voir Appendice A ■

Preuve de la Proposition 12 : considérons la dynamique annexe $\hat{H}(t)$ suivante (qu'on couple à celle de $H(t)$) : $\hat{H}(t)$ évolue comme $H(t)$, excepté que les transitions $H \mapsto H^{(x)}$ pour x à distance inférieure à $L^{3/4}$ du bord ($x \leq L^{3/4}$ ou $L - x \leq L^{3/4}$) sont annulées. On modifie d'autre part le profil initial de sorte que

1. $\hat{H}_x(0) = x$, $x \leq 2L^{3/4}$ et $\hat{H}_x(0) = L - x$, $L - x \leq 2L^{3/4}$,
2. $\hat{H}(0) \geq H(0)$ et $\hat{H}_x(0) \geq 2L^{3/4}$ pour $x \in [2L^{3/4}, L - 2L^{3/4}]$,
3. $\hat{H}(0)$ vérifie (36).

Par comparaison, on a $H(t) \leq \hat{H}(t)$ pour tout $t \geq 0$. Sur l'intervalle $[L^{3/4}, L - L^{3/4}]$, $\hat{H}(t)$ évolue librement, tant qu'il n'y a pas de contact avec la paroi. D'après le Lemme 13, cela ne se produit avant un temps $L^2 T$ qu'avec probabilité petite avec L. D'après le Théorème 6 appliqué sur l'intervalle $[L^{3/4}, L - L^{3/4}]$, on a

$$\lim_{L \to +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T], r \in [L^{-1/4}, 1 - L^{-1/4}]} |\hat{h}^L(t, r) - h(t, r)| > \varepsilon \right) = 0,$$

où $\hat{h}^L(t, r) = j\hat{H}(L^2 t, r)$. Comme $\hat{h}^L(t, r) - h(t, r) = 0$ en $r = 0$ et que les fonctions $\hat{h}^L(t, \cdot)$, $h(t, \cdot)$ sont 1-lipschitziennes, on a

$$\sup_{t \in [0,T], r \in [0, L^{-1/4}]} |\hat{h}^L(t, r) - h(t, r)| \leq 2L^{-1/4}.$$

De même,

$$\sup_{t \in [0,T], r \in [L - L^{-1/4}, L]} |\hat{h}^L(t, r) - h(t, r)| \leq 2L^{-1/4}.$$

On en déduit le résultat. ■

3.4 Borne par en dessous

Dans cette partie, on montre le résultat suivant.

Proposition 14. *On suppose $\lambda \in [0, 1]$. Soit $h_{\text{in}} \in H^2(0, 1)$ une fonction 1-Lipschitzienne positive sur $[0, 1]$ s'annulant en 0 et 1. Soit $H_{\text{in}} \in E_L^+$ satisfaisant (36), soit $H(t)$ l'interface en évolution aléatoire à partir de H_{in}*

selon le processus donné au paragraphe 3.2. Soit h^L le processus remis à l'échelle (39) et soit

$$h \in C(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(0,1))$$

l'unique solution de (40)-(41)-(42). Alors, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'événement

$$h^L(t,r) \geq h(t,r) - \varepsilon, \quad \forall t \in [0,T],\ r \in [0,1], \tag{75}$$

a une probabilité proche de 1 lorsque L est grand.

Preuve de la Proposition 14 : on utilise la comparaison (voir paragraphe 3.2) : la dynamique pour $0 \leq \lambda \leq 1$ domine la dynamique pour $\lambda = 1$ qui domine la dynamique libre. On applique ensuite le Théorème 6 sur le comportement aux grandes échelles de la dynamique libre. ■

A Preuve du Lemme 13

Soit π la mesure uniforme sur E_L, $\pi(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E_L)}$ pour $A \in \mathscr{P}(E_L)$. Noter que

$$\mathrm{Card}(E_L) = \binom{L}{L/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^L}{L^{1/2}}, \tag{76}$$

en utilisant la formule de Stirling. La correspondance interface/particules montre en effet que choisir un chemin $H \in E_L$, c'est choisir une disposition de $L/2$ particules parmi L sites. L'équivalent est obtenu par la formule de Stirling. Il y a encore une autre façon de décrire E_L : considérons une marche aléatoire $B_n = \sum_{k=1}^n X_k$ sur $\mathbb{Z}$ (initialisée à $B_0 = 0$), où les X_k sont des variables aléatoires indépendantes Bernoulli : $\hat{\mathbb{P}}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$. On a introduit ici une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ pour distinguer de la probabilité $\mathbb{P}$ déjà utilisée (distinction non essentielle). Alors $x \mapsto B_x$ est dans E_L si $B_L = 0$ et π coincide avec la probabilité $\hat{\mathbb{P}}(\cdot | B_L = 0)$. On calcule d'autre part $\hat{\mathbb{P}}(B_L = 0)$ est la probabilité de $L/2$ succès (donc $L/2$ échecs) dans une épreuve de Bernoulli, soit

$$\hat{\mathbb{P}}(B_L = 0) = \binom{L}{L/2} \frac{1}{2^L} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi L}},$$

d'après (76). On rappelle maintenant l'inégalité de Chernoff :

$$\hat{\mathbb{P}}(B_x \geq s\sqrt{x}) \leq e^{-s^2/2}. \tag{77}$$

Plus généralement [1], si Z suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$\hat{\mathbb{P}}(X \geq np + n\alpha) \leq e^{-nD(p+\alpha \| p)}, \tag{78}$$

1. voir par exemple http://en.wikipedia.org/wiki/Chernoff_bound

où $D(x\|y) = x\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right)$. Noter que si Z suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors en voyant Z comme la limite d'une binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $n \to +\infty$, $p \to 0$ avec $n/p \to \lambda$, on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\hat{\mathbb{P}}(Z > \lambda + \alpha) \leq \exp\left[\alpha - (\lambda+\alpha)\ln\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda}\right)\right]. \tag{79}$$

Par (77), $\hat{\mathbb{P}}(B_x \geq s\sqrt{L}) \leq e^{-s^2/2}$ pour tout $x \in \{0,\ldots,L\}$ et

$$\pi(H_x \geq s\sqrt{L}) = \hat{\mathbb{P}}(B_x \geq s\sqrt{L}|B_L = 0) \leq \frac{\hat{\mathbb{P}}(B_x \geq s\sqrt{L})}{\hat{\mathbb{P}}(B_L = 0)} \leq CL^{1/2}e^{-s^2/2},$$

pour tout $x \in \{0,\ldots,L\}$. En prenant $s = L^{1/4}$, on obtient

$$\pi(H_x \geq L^{3/4}) \leq CL^{1/2}e^{-L^{1/2}/2} \leq Ce^{-L^{1/2}/4}, \tag{80}$$

pour tout $x \in \{0,\ldots,L\}$.

Notons maintenant $J_L = \{1,\ldots,L-1\}$ Considérons la dynamique discrète $n \mapsto \tilde{H}(n)$ suivante. On se donne $\xi_1, \xi_2, \ldots$ des v.a. i.i.d de loi uniforme sur J_L. Partant de $\tilde{H}(0) \in E_L$, à chaque étape n on tire un site $x = \xi_n \in J_L$ au hasard, on tire un pile ou face, et on effectue la transition $\tilde{H}(n+1) = \tilde{H}(n)$ si face, $\tilde{H}(n+1) = \tilde{H}^{(x)}(n)$ si pile. La mesure uniforme π est invariante par cette dynamique : si $\tilde{H}(0)$ est tiré au hasard selon π alors tous les $\tilde{H}(n)$ suivent la loi π.

Pour faire le lien avec la dynamique considérée jusqu'à présent, on fait les *rappels* suivant : l'enchaînement de deux schémas de Bernoulli est un schéma de Bernoulli. Plus précisément, supposons qu'on tire Y de loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ puis qu'on fasse un schéma de Bernoulli avec Y essais et probabilité individuelle q de succès, alors le nombre total X de succès suit une loi $\mathcal{B}(n,pq)$. Application (en voyant la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme la limite d'une binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $n \to +\infty$, $p \to 0$ avec $n/p \to \lambda$) : si on tire Y de loi Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ puis qu'on fait un schéma de Bernoulli avec Y essais et probabilité individuelle q de succès, alors le nombre total X de succès suit une loi $\mathcal{P}(q\lambda)$. Par conséquent, si Y^t suit une loi de Poisson $\mathcal{P}((L-1)t)$, si $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sont les v.a. i.i.d de loi uniforme sur J_L introduites plus haut (indépendantes du processus (Y^t)), alors

$$N_A^t := \sum_{i=1}^{Y^t} \mathbf{1}_{\xi_i \in A}, \quad A \in \mathscr{P}(J_L),$$

définit une mesure de poisson d'intensité la loi uniforme sur J_L. Pour $x \in J_L$, on définit

$$\tau_x^n = \inf_{t \geq 0}\left\{N_{\{x\}}^t = n\right\},$$

qui suit la même loi que les temps T_x^n utilisés dans la définition de la dynamique $H(t)$ au paragraphe 2.1, avec indépendance des τ_x^n, τ_y^m si $x \neq y$. Par conséquent, si $\tilde{H}(0) = H(0)$, alors on peut coupler les deux dynamiques de sorte que $H(t) = \tilde{H}(N_{J_L}^t)$.

Soit alors $H(0) \geq A$, soit $\tilde{H}(0) = H(0)$ et soit $\tilde{H}_u(0) = H_u(0)$ choisis au hasard selon la mesure uniforme π. La probabilité $\pi(H_u(0) \geq A)$ est petite, $\pi(H_u(0) \geq A) \leq Ce^{-L^{1/2}/4}$ par (80), donc $\pi(\tilde{H}_u(0) \geq \tilde{H}(0))$ est petite avec L. Comme π est invariante par la dynamique des $\tilde{H}(n)$, on a

$$\pi(\tilde{H}_u(n) \geq \tilde{H}(n)) = \pi(\tilde{H}_u(0) \geq \tilde{H}(0))$$

petit avec L uniformément en n. Il suffit donc d'examiner la probabilité sous π de l'événement : il existe $n \leq N_0$, il existe $x \in J_L$, $\tilde{H}_x(n) \leq -L^{3/4}$. En bornant la probabilité de l'union par la somme des probabilités, elle est majorée par

$$N_0 \pi \left(\exists x \in J_L, \tilde{H}_x(n) \leq -L^{3/4} \right) \leq C N_0 e^{-L^{1/2}/4} \tag{81}$$

d'après (80). On prend $N_0 = e^{2L^{1/4}}$. Alors la borne dans (81) est $\mathcal{O}(e^{-L^{1/2}/8})$. On conclut en rappelant que $H(t) = \tilde{H}(N_{J_L}^t)$ et en notant que, d'après (79) avec $\lambda = (L-1)t$, $t = e^{L^{1/4}}$, $\alpha = e^{2L^{1/4}} - \lambda$, on a

$$\hat{\mathbb{P}}(N_{J_L}^t \geq N_0) \leq C \exp\left[-2L^{1/4} e^{2L^{1/4}} \right]$$

est petit avec L. ■

B Fin de la preuve du Lemme 7

On a vu dans le Lemme 8 que $\bar{h}^L(t, \cdot)$ est 1-Lipschitzienne pour tout $t \geq 0$. Il en est de même de la solution h de (40)-(41)-(42). En effet, étendons pour tout $t \geq 0$, la fonction $h(t, \cdot)$ en une fonction 1-périodique. Si $s \in \mathbb{R}$, alors la fonction $h(t, r+s) - h(t, r)$ vérifie l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par linéarité de l'équation (40). Par le principe du maximum, on a

$$\sup_{r \in \mathbb{R}} |h(t, r+s) - h(t, r)| \leq \sup_{r \in \mathbb{R}} |h(0, r+s) - h(0, r)|,$$

pour tout $t \geq 0$, et cela implique que $h(t, \cdot)$ est 1-Lipschitizienne, comme h_{in}. D'après l'inégalité (54), on a alors l'estimation

$$\|\bar{h}^L(t) - h(t)\|_{C([0,1])}^4 \leq 16 \|\bar{h}^L(t) - h(t)\|_{L^2(0,1)}^2. \tag{82}$$

En revenant aux décompositions spectrales (57) et (58), on a

$$\|\bar{h}^L(t) - h(t)\|_{C([0,1])}^4 \leq 32 \sum_{j=1}^{5} \mathrm{I}_j,$$

où

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \sum_{k\geq L} e^{-2\mu_k t}|\langle h_{\mathrm{in}}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}|^2,\\
\mathrm{I}_2 &= \sum_{k=1}^{L-1} e^{-2\mu_k t}|\langle h_{\mathrm{in}}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}|^2\|jA^k - a^k\|^2_{L^2(0,1)},\\
\mathrm{I}_3 &= \sum_{k=1}^{L-1} |e^{-L^2\nu_k t} - e^{-\mu_k t}|^2|\langle h_{\mathrm{in}}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}|^2,\\
\mathrm{I}_4 &= \sum_{k=1}^{L-1} e^{-2L^2\nu_k t}\left|[H_{\mathrm{in}}, A^k] - \langle h_{\mathrm{in}}, a^k\rangle_{L^2(0,1)}\right|^2.
\end{aligned}$$

Par (62), on a $\mathrm{I}_1 \leq \sum_{k\geq L}\frac{C}{k^2} = \mathcal{O}(L^{-1})$. Pour estimer I_2, on remarque qu'on a orthogonalité de a^k et jA^l si $k \neq l$. En effet, on calcule

$$\begin{aligned}
\langle a^k, jA^l\rangle_{L^2(0,1)} &= 2\int_0^1 \sin(\pi k r)\sin\left(\pi l\frac{\lfloor rL\rfloor}{L}\right)dr\\
&= \int_0^1 \cos\left(\pi k r - \pi l\frac{\lfloor rL\rfloor}{L}\right) - \cos\left(\pi k r + \pi l\frac{\lfloor rL\rfloor}{L}\right)dr\\
&= \mathrm{Re}\sum_{x=0}^{L-1}\int_{x/L}^{(x+1)/L} e^{i(\pi k r - \pi l x/L)} - e^{i(\pi k r + \pi l x/L)}dr\\
&= \frac{1}{\pi k}\mathrm{Im}\sum_{x=0}^{L-1}(e^{-i\pi l x/L} - e^{i\pi l x/L})e^{i\pi k x/L}(e^{i\pi k/L} - 1)\\
&= \frac{L}{\pi k}\mathrm{Im}\left((e^{i\pi k/L} - 1)(\mathbf{1}_{k-l=0} - \mathbf{1}_{k+l=0}\right),
\end{aligned}$$

d'où $\langle a^k, jA^l\rangle_{L^2(0,1)} = 0$ si $k \neq l$ (k et l sont positifs donc $k + l = 0$ est exclu). D'autre part

$$\langle a^k, jA^k\rangle_{L^2(0,1)} = \frac{L}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{L}\right). \tag{83}$$

Par conséquent,

$$\|jA^k - a^k\|^2_{L^2(0,1)} = \sum_{l\geq 1}|\langle jA^k - a^k, a^l\rangle_{L^2(0,1)}|^2 = \left|\frac{L}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{L}\right) - 1\right|^2.$$

Par (60), il s'en suit $\|jA^k - a^k\|^2_{L^2(0,1)} = \mathcal{O}(k^4L^{-4})$. Par (64), on obtient $\mathrm{I}_2 = \mathcal{O}(L^{-4})$. Par (60), d'autre part, on a l'estimation

$$|e^{-L^2\nu_k t} - e^{-\mu_k t}|^2 = \mathcal{O}(k^5L^{-3}).$$

Par (64), on en déduit $\mathrm{I}_3 = \mathcal{O}(L^{-2})$. Pour estimer I_4, on décompose la différence

$$
\begin{aligned}
[H_{\mathrm{in}}, A^k] - \langle h_{\mathrm{in}}, a^k \rangle_{L^2(0,1)} &= \langle jH_{\mathrm{in}}, jA^k \rangle_{L^2(0,1)} - \langle h_{\mathrm{in}}, a^k \rangle_{L^2(0,1)} \\
&= \langle jH_{\mathrm{in}} - h_{\mathrm{in}}, jA^k \rangle_{L^2(0,1)} + \langle h_{\mathrm{in}}, jA^k - a^k \rangle_{L^2(0,1)},
\end{aligned}
$$

ce qui donne $\mathrm{I}_4 \leq \mathrm{I}_5 + \mathrm{I}_6$, avec

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_5 &= 2 \sum_{k=1}^{L-1} \left| \langle jH_{\mathrm{in}} - h_{\mathrm{in}}, jA^k \rangle_{L^2(0,1)} \right|^2, \\
\mathrm{I}_6 &= 2 \sum_{k=1}^{L-1} \left| \langle h_{\mathrm{in}}, jA^k - a^k \rangle_{L^2(0,1)} \right|^2.
\end{aligned}
$$

On a $\|jH_{\mathrm{in}} - h_{\mathrm{in}}\|_{C([0,1])} \leq C\frac{1}{L}$, donc

$$
\mathrm{I}_5 \leq \frac{C}{L^2} \sum_{k \geq 1}^{L-1} \|jA^k\|^2_{L^2(0,1)} = \mathcal{O}(L^{-2}).
$$

D'autre part, on peut décomposer

$$
\mathrm{I}_6 = 2 \sum_{k=1}^{L-1} \left| \langle h_{\mathrm{in}}, a^k \rangle \langle jA^k - a^k, a^k \rangle_{L^2(0,1)} \right|^2,
$$

qui se majore comme I_2 en $\mathcal{O}(L^{-4})$. ■

Références

[CMT08] P. Caputo, F. Martinelli, and F. L. Toninelli, *On the approach to equilibrium for a polymer with adsorption and repulsion*, Electron. J. Probab. **13** (2008), no. 10, 213–258.

[Lac14] H. Lacoin, *The scaling limit of polymer pinning dynamics and a one dimensional Stefan freezing problem*, Comm. Math. Phys. **331** (2014), no. 1, 21–66.

[LST14] H. Lacoin, F. Simenhaus, and F. L. Toninelli, *Zero-temperature 2D stochastic Ising model and anisotropic curve-shortening flow*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **16** (2014), no. 12, 2557–2615.