Exercices 1

M1 EDP 2015

1 Stabilité de la solution d'une EDP

On note $\mathbb{T}^n$ le tore de dimension n (classes d'équivalence $\bar{x}$ pour la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^n$). Pour $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction $\varphi\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^k sur $\mathbb{T}^n$ (noté $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^p)$) si la fonction

$$x \ni \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(\bar{x})$$

est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, on notera aussi

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = \int_{[0,1]^n} f(\bar{x})dx.$$

On rappelle la formule de Green dans ce cadre périodique :

$$\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{T}^n} \operatorname{div}(\mathbf{a})(x)\ \varphi(x)dx, \tag{1}$$

pour toutes fonctions $\mathbf{a} \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

Pour $p \geq 1$, on note $L^p(\mathbb{T}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont $\mathbb{Z}^n$ périodique et satisfont

$$\int_{[0,1]^n} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Si $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ et $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} u(x)e^{-2\pi i k\cdot x}dx = \langle u, e_k\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

le k-ième coefficient de Fourier de u. Ici $e_k(x) := e^{2\pi i k\cdot x}$.

1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Soit $u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$ satisfaisant

$$u \in C^\infty(]0, +\infty[\times\mathbb{T}^n), \tag{2}$$

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{T}^n, \tag{3}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4}$$

Remarque : Dans (4), $u(0)$ est la valeur en $t = 0$ de l'application $t \mapsto u(t)$ tracée dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Considérer la valeur en 0 a un sens puisque l'application est continue par hypothèse.

En passant en Fourier, montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-4\pi^2 |k|^2 t} \hat{u}_0(k) e_k, \tag{5}$$

l'égalité ayant lieu dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

2. Réciproquement, montrer que la formule (5) définit une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$$

satisfaisant (2), (3), (4).

3. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \int_{\mathbb{T}^n} u_0(x) dx$$

dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

4. Qu'en déduit-on au sujet de la stabilité dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ de la solution nulle de (3)-(4) ?

2 Equation de transport

Soit $b \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur borné.

1. Justifier que le flot $\Phi_t(x)$ de l'équation différentielle $\dot{x} = b(x)$ est défini globalement en temps. On rappelle que Φ_t définit un C^1-difféomorphisme $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

2. On note Φ^t la fonction inverse de $x \mapsto \Phi_t(x)$. Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$u \colon (t, x) \mapsto u_0(\Phi^t(x))$$

est solution de l'équation de transport

$$\partial_t u(t, x) + b(x) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0 \quad \text{pour tous } t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

et satisfait la condition initiale : $u(0, x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Comment opère l'équation de transport (6) sur le graphe de u_0 ? Qu'en est-il dans les cas particuliers $n = 1$, $b \equiv \pm 1$?

3 Étude d'un problème elliptique en dimension d'espace $d = 1$

On considère le problème aux limites suivant :

$$\text{trouver } u \in C^2[0,1] \quad \text{tel que}$$
$$-u''(x) + a(x)\,u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[, \tag{7}$$
$$u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta. \tag{8}$$

Les fonctions, $a, f \in C^0[0,1]$, sont données, ainsi que les réels α, β. On suppose $a(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$.

1. En utilisant les théorèmes de base sur les équations différentielles, montrer que les solutions de (7) seule forment un espace affine de dimension 2.

2. Pour $v \in C^2(]0,1[) \cap C^0[0,1]$, on pose $(\mathcal{L}v)(x) = -v''(x) + a(x)\,v(x)$. Montrer que

   $$(\mathcal{L}v)(x) \leq 0,\ \forall\, x \in]0,1[, \quad \text{entraîne} \quad v(x) \leq \max(0, v(0), v(1)), \quad \forall\, x \in [0,1].$$

   Indication : quel est le signe de v'' sur les intervalles où $v > 0$?

3. Vérifier que, si u est solution de (7), (8), la fonction

   $$w(x) = u(x) - |\alpha|\,(1-x) - |\beta|\,x - \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

   vérifie $(\mathcal{L}w)(x) \leq 0$, pour tout $x \in [0,1]$.

4. Montrer que les solutions de (7), (8) vérifient

   $$\forall\, x \in [0,1], \qquad |u(x)| \leq |\alpha|\,(1-x) + |\beta|\,x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

   en déduire l'unicité des solutions de (7), (8).

5. Montrer que la solution du problème

   $$-v''(x) + a(x)\,v(x) = 0, \quad \forall x \in]0,1[,$$
   $$v(0) = 0 \quad v'(0) = 1,$$

   vérifie $v(1) \neq 0$. En déduire que le problème (7), (8) admet une solution et une seule, et que de plus, si $a \in C^k[0,1]$ et $f \in C^k[0,1]$, alors $u \in C^{k+2}[0,1]$.

4 Minimisation et EDP

On renvoit au préambule de l'exercice 1 pour les notations dans le cadre périodique.

1. **Equation de Poisson :** Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ de moyenne nulle :

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = 0. \tag{9}$$

Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ minimisant la fonctionnelle

$$J \colon u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla_x u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

(a) Montrer que

$$-\Delta u_*(x) = f(x), \tag{10}$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

(b) Pour $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx$$

le k-ième coefficient de Fourier de f. Déterminer u_* solution de (10) en fonction des coefficients Fourier de f.

(c) Quelle hypothèse sur f vous assurerait en effet que u_* est de classe C^2 ?

(d) Montrer que si $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ vérifie (10), alors u_* minimise la fonctionnelle J parmi les fonctions $u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

2. **Courbure Moyenne prescrite :** Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{A} \colon u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{T}^n} \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Montrer que u_* vérifie l'équation

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_*(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_*(x)|^2}} \right) = f(x), \tag{11}$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

3. **Minimisation sous contrainte :** Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^n)$. Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^n)$ telle que $|u(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$ (*i.e.* u_* est à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$). On suppose que u_* minimise la fonctionnelle

$$J\colon u \in C^1(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^n) \mapsto \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\cdot u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^n)$ *à valeurs dans* $\mathbb{S}^{n-1}$. Ici $\nabla u(x)$ est la matrice de composantes $\partial_{x_i} u_j$, $i,j = 1\dots,n$. On a noté $|A|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{n^2}$) associée au produit scalaire

$$(A,B) \mapsto A{:}B = \mathrm{trace}(A^t B).$$

Montrer que u_* vérifie l'équation

$$-\Delta u(x) = |\nabla u(x)|^2 u(x) + P_{\langle u_*(x)\rangle^\perp} f(x), \tag{12}$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, où, pour $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a noté

$$P_{\langle u\rangle^\perp}\colon v \mapsto v - (u\cdot v)u$$

la projection orthogonale sur $\langle u\rangle^\perp$.

Indication :

(a) Pour $v \in C^2(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^n)$, on pourra introduire la fonction

$$w(t) = \frac{u+tv}{|u+tv|},$$

pour t petit et on montrera que

$$w(t) = u + tP_{\langle u\rangle^\perp} v + \mathcal{O}(t^2).$$

(b) On dérivera l'identité $u(x)\cdot u(x) = 1$ pour montrer $\partial_{x_i} u(x)\cdot u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, $i \in \{1,\dots,n\}$, puis l'identité

$$\nabla u{:}\nabla((u\cdot v)u) = |\nabla u|^2 u\cdot v.$$