Feuille de TD 2

M1 EDP 2016

Exercice 1. L'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$

Soit ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^3$. On cherche une fonction $u(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$-\Delta u = \rho, \tag{1}$$

sous les conditions suivantes de décroissance à l'infini :

$$x \mapsto |x|\, u(x) \text{ bornée}, \qquad x \mapsto |x|^2\, \nabla u(x) \text{ bornée}. \tag{2}$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ et calculer son Laplacien.
2. Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$. On note $n(x)$ le vecteur normal unitaire sortant en tout point $x \in \partial\Omega$ et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. On se donne deux fonctions u et v de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$. À l'aide de la formule de Stokes, démontrer la formule de Green pour le Laplacien :

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\; dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma(x).$$

3. Pour $0 < \alpha < \beta$, on définit la sphère et l'anneau suivants :

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ |x| = \alpha \right\}, \qquad A_{\alpha,\beta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \le |x| \le \beta \right\}$$

Soit $0 < \varepsilon < R$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (2). Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, montrer l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u(x+y)\; d\sigma(y) = \int_{A_{\varepsilon,R}} \frac{(-\Delta u)(x+y)}{|y|}\; dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

4. Montrer que l'unique solution de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ de (1), satisfaisant (2), s'écrit

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\; dy.$$

Exercice 2. Fonction de Green sur le demi-espace - I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. On note $x = (\bar{x}, x_n)$ le point courant dans $\mathbb{R}^n$, avec $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et on note $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace ouvert

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n_+$, on note $\check{x} = (\bar{x}, -x_n)$. Soit Φ la solution fondamentale de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que, à $x \in \mathbb{R}^n_+$ fixé, la fonction $W(y) = -\Phi(\check{x} - y)$ est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta W(y) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+, \\ W(y) &= -\Phi(x-y), \quad y \in \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

2. En déduire l'expression suivante de la fonction de Green du Laplacien sur $\mathbb{R}^n_+$:

$$K(x,y) = \frac{2}{S_n}\frac{x_n}{|x-y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+,$$

   où S_n est la mesure de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. *Note : on appelle K le noyau de Poisson sur $\mathbb{R}^n_+$.*

3. Soit $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y,0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$. On admet (voir exercices additionnels pour la preuve) que la formule

$$u(x) := \frac{2x_n}{S_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy$$

   définit une fonction C^∞ bornée sur $\mathbb{R}^n_+$, solution de l'équation de Laplace $-\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^n_+$, vérifiant la condition au bord

$$\lim u(x) = g(x_0),$$

   où $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ et la limite est prise sur les $x \in \mathbb{R}^n_+$ tendant vers x_0. On suppose que

$$g(y) = |y|,$$

   pour $|y| \leq 1$. Montrer que ∇u n'est pas bornée au voisinage de 0.

   Indication : on pourra évaluer le quotient différentiel $\frac{u(te_n)-u(0)}{t}$ pour $t > 0$ petit.

Exercice 3. Principe du maximum

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$-\Delta u \leq 0 \text{ dans } \Omega.$$

On veut montrer qu'on a alors

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x). \tag{3}$$

1. On suppose dans un premier temps

$$-\Delta u < 0 \text{ dans } \Omega.$$

   On suppose d'autre part que u atteint son max sur $\overline{\Omega}$ un un point intérieur $x_0 \in \Omega$. Montrer que (au sens des matrices symétriques)

$$D^2 u(x_0) \leq 0.$$

2. En déduire $\Delta u(x_0) \leq 0$ et une contradiction.
3. Prouver le principe du maximum dans le cas général. On pourra considérer la fonction
$$x \mapsto u(x) + \varepsilon e^{x_1}, \quad \varepsilon > 0.$$
4. Soit $w \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant
$$-\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega.$$
Montrer que
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla w|(x) = \max_{x \in \partial\Omega} |\nabla w|(x). \tag{4}$$
Comparer au résultat de la question 3. de l'exercice 2.

Exercice 4. La formule de la moyenne et applications

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Delta u = 0$ dans Ω. On suppose $u \geq 0$ dans Ω.

1. Pour $a \in \mathbb{R}^N$ on note $B(a, R)$ la boule de centre a et de rayon R, $S(a, R)$ la sphère de centre a et de rayon R, et on rappelle que $|S(0, 1)| = N\omega_N$, où $\omega_N = |B(0, 1)|$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $R > 0$, on pose
$$\varphi(R) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} u(a + Rs)\, d\sigma(s).$$
Vérifier que
$$\varphi(0) = u(a), \qquad \varphi'(R) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} \frac{\partial u}{\partial n}(a + Rs)\, d\sigma(s),$$
puis, en appliquant la formule de Green à $\int_{B(a,R)} \Delta u\, dx$, en déduire que
$$u(a) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} u(a + Rs) d\sigma(s).$$
2. En déduire que
$$u(a) = \frac{1}{R^N\omega_N} \int_{B(a,R)} u(x)\ dx.$$
3. Montrer l'existence de $C > 0$ indépendante de R telle que
$$\forall a \in \Omega, \quad \forall R > 0 \quad \text{tel que } \overline{B}(a, 4R) \subset \Omega, \ \ \forall (x, y) \in B(a, R)^2, \qquad u(x) \leq Cu(y).$$
Indication : on écrira $u(x) = \frac{1}{R^N\omega_N} \int_{B(x,R)} udx$, *et* $u(y) = \frac{1}{(3R)^N\omega_N} \int_{B(y,3R)} udx$.
4. *Application 1 : le théorème de Liouville.* Supposons $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que u est une constante, et que le résultat reste vrai si l'on ne suppose plus $u \geq 0$. Le résultat reste-t-il vrai si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$?
5. *Application 2.* Soit Ω' un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer l'existence de $C(\Omega') > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in \Omega'^2, \qquad u(x) \leq Cu(y).$$

Exercices Optionnels

Exercice 5. Fonction de Green sur le demi-espace - II

Les notations sont celles de l'exercice "Fonction de Green sur le demi-espace - I". En particulier, le noyau de Poisson $K(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial \nu_y} G(x,y)$ est

$$K(x,y) = \frac{2}{S_n} \frac{x_n}{|x-y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial \mathbb{R}^n_+.$$

Soit $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y,0) \in \partial \mathbb{R}^n_+$. On définit $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ par

$$u(x) := \frac{2x_n}{(n-2)S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n_+$$

1. Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \mapsto K(x,y)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^n_+$.
2. On admet la formule suivante :

   $$\frac{S_{n-1}}{S_n} \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n/2}} dr = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

   Montrer que

   $$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x,y) dy = 1, \tag{6}$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$.
3. Montrer que u est bornée.
4. Justifier que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ et u harmonique dans $\mathbb{R}^n_+$.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que

   $$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \text{ si } |y - x_0| < \delta.$$

   Montrer que

   $$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon,$$

   pour $x \in \mathbb{R}^n_+$ assez proche de x_0.

   Indication : on notera que

   $$u(x) - g(x_0) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (g(y) - g(x_0)) K(x,y) dy, \tag{7}$$

   par (6). On pourra considérer les $x \in \mathbb{R}^n_+$ à distance au plus $\delta/2$ de x_0 et séparer le domaine d'intégration dans (7) en deux parties : $B(x_0,\delta)$ et $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(x_0,\delta)$.
6. Conclure.
7. Prouver la formule (5). On rappelle que $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ où Γ est la fonction Γ d'Euler.