Feuille de TD 3

M1 EDP 2016

Exercice 1. L'équation de la chaleur avec terme source - Effet régularisant

On note
$$\Phi_t\colon x \mapsto \Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$
le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$\|\Phi_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p t^{-\frac{n}{2p'}},$$
pour tout $t > 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$, où p' est l'exposant conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et C_p est une constante dépendant de p.
2. Soit $T > 0$. Soit $f \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ où les exposants $r, p \in [1, +\infty]$ satisfont la condition
$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 2. \tag{1}$$
Montrer que l'application
$$v\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \int_0^t (f(s) * \Phi_{t-s})(x) ds \tag{2}$$
est bien définie, avec
$$\|v\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \leq C_T \|f\|_{L^r(\mathbb{R}_+;L^p(\mathbb{R}^n))}, \tag{3}$$
où la constante C_T dépend de T, r, p, n.

   On rappelle l'inégalité de Young sur $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) :
$$\|\varphi * \theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \leq \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \|\theta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{4}$$
pour tout $p \in [1, +\infty]$.
3. Qu'en déduit-on au sujet de la solution de l'équation de la chaleur avec terme source dans $\mathbb{R}^n$?
4. Même question dans le cas $f = \mathrm{div}_x(G)$. On suppose que les composantes G_i de G satisfont $G_i \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ et que la condition suivante (dite de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin) est satisfaite :
$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 1. \tag{5}$$

Exercice 2. Estimations d'énergie

Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t \geq 0$.

1. Montrer l'identité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{6}$$

2. Montrer l'identité

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + t\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t s\|\Delta u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{7}$$

Exercice 3. Inégalité de Varopoulos-Carne

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (classe de Schwartz) et $\varphi \colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ est une fonction à croissance au plus pôlynomiale en $-\infty$, on note $\varphi(\Delta)f$ la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$\mathcal{F}\big[\varphi(\Delta)f\big](\xi) = \varphi(-|\xi|^2)\mathcal{F}f(\xi),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $e^{t\Delta}f$?
2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$?
3. En utilisant la formule de Kirchhoff, montrer que

$$\cos(t\sqrt{-\Delta})f(x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{B(x,t)} \Delta f(y)dy + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} f(y)d\sigma(y). \tag{8}$$

4. Montrer que, si f est à support compact, alors, pour tout $t \geq 0$, $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$ est à support compact et son support est à distance au plus t du support de f. La distance entre deux ensembles E et G de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$d(E,G) = \inf\left\{|x-y|; x \in E, y \in G\right\},$$

   où $|\cdot|$ est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
5. Montrer la formule

$$e^{-\frac{t}{2}z^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}}\cos(sz)ds, \quad z > 0.$$

   On rappelle la transformée de Fourier de la Gaussienne en dimension m : $\mathcal{F}G(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, où $G(x) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

6. En déduire

$$e^{t\Delta/2}f = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}}\cos(s\sqrt{-\Delta})f ds, \tag{9}$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

7. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ des fonctions à supports compacts, notés respectivement F et G. Montrer l'inégalité de Varopoulos-Carne :

$$\langle e^{t\Delta/2}f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi d(F,G)^2}}\exp\left(-\frac{d(F,G)^2}{2t}\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{10}$$

Remarque : l'inégalité de Varopoulos-Carne est vraie en toute dimension (même preuve que ci-dessus, excepté qu'on emploie la formule de représentation ad hoc pour $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$).

Exercices Optionnels

Exercice 4. Limite Hydrodynamique

Soit $N \geq 1$. Soit $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire $x \cdot y$. On note $|x|$ la norme euclidienne associée. Pour $t > 0$, $x, y, v, w \in \mathbb{R}^n$, On pose

$$D(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - e^{-2t}\Big)t - (1 - e^{-t})^2,$$
$$A(t, x, v) = \frac{1}{D(t)} \int_0^t |(1 - e^{-s})v - e^{-s}x|^2 ds$$

et

$$G_t(x, v; y, w) = \frac{1}{(4\pi)^N D(t)^{N/2}} \exp\Big[-\frac{1}{4}A(t, x - y - (1 - e^{-t})w, v - e^{-t}w)\Big]. \tag{11}$$

On *admet*[1] que G_t fournit la solution fondamentale de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad Q(f) := \mathrm{div}_v(\nabla_v f + vf), \tag{12}$$

au sens où, pour tout $f_{\mathrm{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ (“in” pour “initiale”), la fonction

$$f(t, x, v) := \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n} G_t(x, v; y, w) f_{\mathrm{in}}(y, w) dy dw$$

est l'unique fonction

$$f \in C(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)) \cap C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \tag{13}$$

satisfaisant (12) dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et satisfaisant la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} \|f(t) - f_{\mathrm{in}}\|_{L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} = 0. \tag{14}$$

1. **Solution particulière.** On note $\mathcal{M}$ (lettre $\mathcal{M}$ pour “Maxwellienne”, mais c'est aussi la gaussienne) la fonction
$$\mathcal{M}(v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}.$$
   Montrer que $(x, v) \mapsto \mathcal{M}(v)$ est une solution stationnaire de (12).

1. ce qui se montre par le calcul direct, mais c'est long, ou bien, plus directement, par l'interprétation probabiliste de l'équation (12)

2. **Perturbation.** Pour $\varepsilon > 0$ on se donne une donnée initiale f_{in} de la forme

$$f_{\text{in}}(x, v) = \rho_{\text{in}}(\varepsilon x)\mathcal{M}(v).$$

   où $\rho_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_b^1(\mathbb{R}^N)$, $\rho_{\text{in}}(0) = 1$. Pour ε petit et x borné, $f_{\text{in}}(x, v)$ est proche de l'équilibre $\mathcal{M}(v)$. On s'attend à voir la solution de (14)-(14) s'éloigner de $\mathcal{M}(v)$ au bout d'un temps assez long. On effectue le réechelonnement suivant

$$f^{\varepsilon}(t, x, v) = f(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, v). \tag{15}$$

   De quelle équation f^{ε} est-elle alors solution ?
3. **Limite du noyau.** Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_{\varepsilon^{-2}t}(\varepsilon^{-1}x, v; \varepsilon^{-1}y, w)\mathcal{M}(w)dw = \Phi_t(x - y)\mathcal{M}(v), \tag{16}$$

   où Φ_t est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$.
4. **Limite hydrodynamique.** Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $x, v \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f^{\varepsilon}(t, x, v) = \rho(t, x)\mathcal{M}(v), \tag{17}$$

   où ρ est la solution d'un problème que l'on précisera.

Remarque : l'équation (12) est une équation dite cinétique. Elle résulte d'une description statistique de la matière, à une échelle intermédiaire, dite mésoscopique, entre l'échelle moléculaire (description microscopique) et l'échelle dite fluide (description macroscopique). L'équation de Boltzmann est probablement la plus célèbre des équations cinétiques. Ici, (12) est l'équation dite de Fokker-Planck. La limite (17), qui établit un lien (après remise à l'échelle) entre la description mésoscopique et la description macroscopique est un exemple de limite hydrodynamique.