Feuille de TD 4

M1 EDP 2016

Exercice 1. Opérateurs différentiels et symbole

Donner l'ordre et les symboles des opérateurs différentiels suivants et préciser s'ils sont elliptiques ou non.

1. $Lu(x) = -\Delta u(x) + b \cdot \nabla u(x) + cu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $Lu(t, x) = \partial_t u(t, x) - i\Delta u(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $Lf(x, v) = v \cdot \nabla_x f(x, v) - \Delta_v f(x, v)$, $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Estimations elliptiques

Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (classe de Schwartz), on note

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{ix\cdot\xi} dx$$

la transformée de Fourier de u. Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ comme la fermeture de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de la norme

$$\|u\|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2}, \quad \langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Soit $Lu(x) = cu(x) - \Delta u(x)$ où $c > 0$. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\|u\|_{H^{s+2}} \leq C\|Lu\|_{H^s}, \tag{1}$$

pour une constante C qu'on précisera.

Exercice 3. Une Estimation hypoelliptique – I

On note (x, v) la point courant dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (classe de Schwartz), on note

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x, v) e^{i(x\cdot\xi + v\cdot\eta)} dx dv$$

la transformée de Fourier de f par rapport aux deux variables (x, v). Pour $s \geq 0$, on note $\langle D_x\rangle^s$ et $\langle D_v\rangle^s$ les opérateurs de symboles respectifs $\langle\xi\rangle^s$ et $\langle\eta\rangle^s$, où

$$\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \langle\eta\rangle = (1 + |\eta|^2)^{1/2}.$$

Soit les opérateurs

$$L_0 f(x, v) = v \cdot \nabla_x f(x, v), \quad Lf(x, v) = v \cdot \nabla_x f(x, v) - \Delta_v f(x, v).$$

1. Soit $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que $L_0 f = g$. Montrer que $\xi \cdot \nabla \hat{f}(\xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta)$.
2. On introduit une variable de temps fictive t et $\hat{f}(t, \xi, \eta) := \hat{f}(\xi, \eta)$. Montrer que $\hat{f}(t, \xi, \eta)$ satisfait l'équation
$$\partial_t \hat{f}(t, \xi, \eta) + \xi \cdot \nabla \hat{f}(t, \xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta)$$
En déduire, pour tout $t \geq 0$,
$$\hat{f}(\xi, \eta) = \hat{f}(\xi, \eta - t\xi) + \int_0^t \hat{g}(\xi, \eta - s\xi) ds,$$
puis
$$|\hat{f}|^2(\xi, \eta) \leq 2|\hat{f}|^2(\xi, \eta - t\xi) + 2t \int_0^t |\hat{g}|^2(\xi, \eta - s\xi) ds. \tag{2}$$
3. Soit $r \in]0, 2[$ et soit $\tau > 0$. On note A_τ le domaine [1]
$$A_\tau = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |\eta| \geq 2\tau|\gamma(\xi)| \text{ ou } 2|\eta| \leq \tau|\gamma(\xi)|\}, \quad \gamma(\xi) := |\xi|^{-r/2}\xi.$$
En choisissant $t = \tau|\xi|^{-r/2}$ dans (2), montrer que
$$\iint_{A_\tau} |\xi|^r |\hat{f}|^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \leq \iint_{A_\tau} |\xi|^r |\hat{f}|^2\big(\xi, \eta - \tau\gamma(\xi)\big) d\xi d\eta + 2\tau^2 \|g\|_{L^2}^2, \tag{3}$$
où L^2 désigne l'espace $L^2(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v^n)$.
4. Soit $\alpha \geq 0$ et soit $r = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$. Montrer que
$$C_{\alpha,\tau} := \sup_{(\xi,\eta) \in A_\tau} \frac{|\xi|^r}{\langle \eta - \tau\gamma(\xi) \rangle^{2\alpha}} < +\infty. \tag{4}$$
5. En déduire
$$\iint_{A_\tau} |\xi|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} |\hat{f}|^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \leq C_{\alpha,\tau} \|\langle D_v \rangle^\alpha f\|_{L^2}^2 + 2\tau^2 \|g\|_{L^2}^2. \tag{5}$$
6. Montrer, en considérant deux paramètres τ_1 et τ_2 bien choisis, que
$$\|\langle D_x \rangle^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} f\|_{L^2}^2 \leq C_\alpha \left[\|\langle D_v \rangle^\alpha f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right] \tag{6}$$
pour une certaine constante C_α.
7. On admet le résultat suivant : pour $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,
$$Lf = g \Rightarrow \|\langle D_v \rangle^2 f\|_{L^2}^2 \leq C \left[\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right], \tag{7}$$
pour une certaine constante C. Montrer que si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ satisfont $Lf = g$, alors
$$\|\langle D_x \rangle^{\frac{2}{3}} f\|_{L^2}^2 + \|\langle D_v \rangle^2 f\|_{L^2}^2 \leq C_{\text{hypo}} \left[\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right], \tag{8}$$
pour une certaine constante C_{hypo}.

1. on pourra faire un dessin...

Remarque : comparer avec le résultat de l'exercice 2. Dans l'exercice 2 on montre un gain de deux dérivées. Ici on obtient un gain de deux dérivées en v et de surcroît un gain de $2/3$ de dérivée en x. Cela est dû à la structure bien particulière de l'opérateur L qui fait qu'une part de la régularité en v se transmet en régularité en x (*cf.* (6)).

Exercice 4. Une Estimation hypoelliptique – II

L'objet de cette deuxième partie est la preuve de l'estimation (7). On se donne donc $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ satisfaisant $Lf = g$.

1. Montrer que $\xi \cdot \nabla \hat{f}(\xi,\eta) + |\eta|^2 \hat{f}(\xi,\eta) = \hat{g}(\xi,\eta)$.
2. On introduit une variable de temps fictive t et $\hat{f}(t,\xi,\eta) := \hat{f}(\xi,\eta)$. Montrer que $\hat{f}(t,\xi,\eta)$ satisfait l'équation

$$\partial_t \hat{f}(t,\xi,\eta) + \xi \cdot \nabla \hat{f}(t,\xi,\eta) + |\eta|^2 \hat{f}(t,\xi,\eta) = \hat{g}(\xi,\eta)$$

   En déduire, pour tout $t \geq 0$,

$$\hat{f}(\xi,\eta) = e^{-\int_0^t |\eta - s\xi|^2 ds} \hat{f}(\xi, \eta - t\xi) + \int_0^t e^{-\int_0^s |\eta-\sigma\xi|^2 d\sigma} \hat{g}(\xi, \eta - s\xi) ds, \tag{9}$$

   puis

$$|\hat{f}|^2(\xi,\eta) \leq 2e^{-2\int_0^t |\eta - s\xi|^2 ds} |\hat{f}|^2(\xi, \eta - t\xi) + 2t \int_0^t e^{-2\int_0^s |\eta-\sigma\xi|^2 d\sigma} |\hat{g}|^2(\xi, \eta - s\xi) ds. \tag{10}$$

3. Montrer que

$$\sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2n}} |\eta + \xi| e^{-2\int_0^1 |\eta - s\xi|^2 ds} < +\infty. \tag{11}$$

   Indication : on pourra décomposer ξ en $\xi = \gamma\eta + \zeta$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta \cdot \zeta = 0$.
4. En déduire que

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} |\eta|^2 e^{-2\int_0^1 |\eta - s\xi|^2 ds} |\hat{f}|^2(\xi, \eta - \xi) d\xi d\eta \leq C \|f\|_{L^2}^2, \tag{12}$$

   et

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^1 |\eta|^2 e^{-2\int_0^s |\eta - \sigma\xi|^2 d\sigma} |\hat{g}|^2(\xi, \eta - s\xi) d\xi d\eta \leq C \|g\|_{L^2}^2, \tag{13}$$

   pour une certaine constante C.
5. Conclure.