Feuille TD5

M1 EDP 2016

Exercice 1. Principe du maximum faible pour les solutions faibles

Soit U un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit, avec convention de sommation sur les indices répétés, l'opérateur $Lu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u)$. Ici les coefficients a_{ij} sont des fonctions $L^\infty(U)$. On suppose l'opérateur L uniformément elliptique : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, pour presque tout $x \in U$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$. On rappelle le résultat suivant : si $v \in H^1(U)$, alors $v^+ \in H^1(U)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v\geq 0}\nabla v = \mathbf{1}_{v>0}\nabla v \text{ p.p. dans } U.$$

Soit $f \in L^2(U)$ et $u \in H_0^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $Lu \leq f$ au sens faible suivant : pour toute fonction positive $v \in H_0^1(U)$,

$$\int_U a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)dx \leq \int_U f(x)v(x)dx. \tag{1}$$

1. En appliquant (1) à $v = u^+$, montrer que
$$\alpha\|\nabla u^+\|^2_{L^2(U)} \leq \|f^+\|_{L^2(U)}\|u^+\|_{L^2(U)}.$$
2. Soit C_P la constante dans l'inégalité de Poincaré
$$\forall v \in H_0^1(U), \quad \|v\|_{L^2(U)} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^2(U)}. \tag{2}$$
Montrer que
$$\|u^+\|_{L^2(U)} \leq \frac{C_P^2}{\alpha}\|f^+\|_{L^2(U)}.$$
3. En déduire : $u \in H_0^1(U)$ et $Lu \leq 0$ impliquent $u \leq 0$ p.p. dans U.

Exercice 2. Un exemple de régularité intérieure

Soit U un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, soit $f \in L^1(U)$.

Définition 1 *Soit $u \in H_0^1(U)$. On dit que u satisfait l'inégalité $-\Delta u \leq f$ dans U au sens faible si*

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx \leq \int_U f v dx, \tag{3}$$

pour tout fonction positive $v \in C_c^\infty(U)$.

Théorème 2 *Soit $u \in H_0^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $-\Delta u \leq f$ dans U au sens faible. On suppose $f \in L^p(U)$ où $p > N/2$. Alors il existe une constante $K \geq 0$ ne dépendant que de C_S (voir (5) ci-dessous) et de p, N telle que*

$$u(x) \leq K(\|f^+\|_{L^p(U)} + \|u^+\|_{L^q(U)}), \tag{4}$$

pour presque tout x dans U, où q est l'exposant conjugué de p.

Le but de l'exercice est de prouver le Théorème 2.

Rappel 1 : si $v \in H^1(U)$, alors $v^+ \in H^1(U)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v\geq 0}\nabla v = \mathbf{1}_{v>0}\nabla v \text{ p.p. dans } U.$$

Rappel 2 : Injection de Sobolev [1] : il existe une constante $C_S \geq 0$ telle que

$$\|v\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|\nabla v\|_{L^2(U)}, \quad \forall v \in H_0^1(U), \tag{5}$$

où 2^* est n'importe quel exposant ≥ 1 si $N \leq 2$ (auquel cas C_S dépend du choix de la valeur de 2^*), $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ si $N > 2$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_U fv dx$ est bien définie pour tout $v \in H_0^1(U)$ et que (3) est vérifiée pour tout fonction positive $v \in H_0^1(U)$.
2. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels positifs. On note
$$u_k = (u - a_k)^+, \quad A_k = \{x \in U; u_k(x) > 0\}.$$
Montrer que
$$\int_U |\nabla u_k|^2 dx \leq \|f^+\|_{L^p(U)} \|u_k\|_{L^q(U)},$$
où q est l'exposant conjugué de p.
3. En déduire
$$\|u_k\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|f^+\|_{L^p(U)}^{1/2} \|u_k\|_{L^q(U)}^{1/2}. \tag{6}$$
4. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, pour tout $\beta > 0$,
$$\mathbf{1}_{A_k} \leq \frac{u_{k-1}^\beta}{(a_k - a_{k-1})^\beta}.$$
5. En remarquant que $u_k \leq u_{k-1}$, montrer que
$$\|u_k\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|f^+\|_{L^p(U)}^{1/2} (a_k - a_{k-1})^{-\gamma} \|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}^\mu, \quad \gamma := \frac{2^*}{2q} - \frac{1}{2}, \quad \mu := \frac{2^*}{2q}. \tag{7}$$
6. Justifier $\mu > 1$.
7. On prend $a_k = (1 - 2^{-k-1})M$ pour une constante $M \geq 1$ à déterminer plus tard. Montrer que
$$\frac{\|u_k\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \leq 2^\gamma C_S \left[\frac{\|f^+\|_{L^p(U)}}{M}\right]^{1/2} 2^{\gamma k} \left[\frac{\|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}}{M}\right]^\mu, \tag{8}$$
puis que
$$\frac{\|u_k\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \leq 2^\gamma C_S 2^{\gamma k} \left[\frac{\|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}}{M}\right]^\mu, \tag{9}$$
si
$$M \geq \|f^+\|_{L^p(U)}. \tag{10}$$

1. se déduit de l'injection de Sobolev $H^1(U) \hookrightarrow L^{2^*}(U)$ et de l'inégalité de Poincaré, cf. (2) ci-dessus

8. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de C_S, p, N tel que

$$\frac{\|u_0\|_{L^{2^*}(U)}}{M} < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|u_k\|_{L^{2^*}(U)} = 0 \tag{11}$$

   On pourra passer au log dans l'estimation suivante (c'est une réécriture de (9))

$$z_k \leq CA^k z_{k-1}^{\mu}, \quad z_k := \frac{\|u_k\|_{L^{2^*}(U)}}{M}, \quad C := 2^{\gamma} C_S, \quad A := 2^{\gamma}. \tag{12}$$

9. Si (11) est réalisé, qu'en déduit-on au sujet de u ?
10. On s'intéresse à la condition $\frac{\|u_0\|_{L^{2^*}(U)}}{M} < \varepsilon$. En utilisant (6) et (10), justifier

$$\frac{\|u_0\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \leq C_S \left[\frac{\|u^+\|_{L^q(U)}}{M}\right]^{1/2}. \tag{13}$$

11. Conclure.
12. Justifier rapidement que la méthode se généralise au cas de l'équation

$$\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = f,$$

   où $a_{ij} \in L^\infty(U)$, où on a utilisé la convention de sommation sur les indices répétés, et où la condition d'ellipticité suivante est satisfaite : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, pour presque tout $x \in U$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$, où on a de nouveau utilisé la convention de sommation sur les indices répétés.

Remarque : on obtient ici une estimation L^∞ dans tout U. Ce n'est donc pas stricto sensu un résultat de régularité *intérieure*. Ce dernier résultat est le suivant : soit $u \in H^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $-\partial_i(a_{ij}\partial_j u) \leq f$ (noter qu'on ne suppose plus $u \in H_0^1(U)$ ici ! On ne sait pas que u est nulle au bord), soit $V \subset U$ avec $\overline{V} \subset U$. Alors il existe une constante M_V telle que $u \leq M_V$ p.p. sur V. La méthode de preuve est similaire à celle ci-dessus, mais il faut introduire des fonctions de troncatures ζ_k convergeant vers la fonction caractéristique de V et tester l'inégalité $-\partial_i(a_{ij}\partial_j u) \leq f$ non pas avec u_k comme à la question 1., mais avec $\zeta_k^2 u_k$, et effectuer un travail additionnel...

Exercice 3. Une équation elliptique semi-linéaire [2]

Soit U un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit, avec convention de sommation sur les indices répétés, l'opérateur $Lu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u)$. Ici les coefficients a_{ij} sont des fonctions $C^1(\overline{U})$. On suppose (a_{ij}) symétrique et l'opérateur L uniformément elliptique. On se donne $r > N/2$, $f \in L^r \cap L^2(U)$ une fonction positive non identiquement nulle, un exposant $p > 1$ et on s'intéresse à l'existence de solutions faibles à l'équation

$$Lu = f + \lambda|u|^p, \quad u \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U), \tag{14}$$

où λ est un paramètre positif. Noter la condition $u \in H_0^1(U)$, de sorte qu'on cherche des solutions nulles au bord de U.

1. On suppose qu'il existe $\bar{u} \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U)$ sursolution de (14), *i.e.* satisfaisant $L\bar{u} \geq f + \lambda|\bar{u}|^p$ au sens faible.
   (a) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$,
   $$Lu_{n+1} = f + \lambda u_n^p, \quad u_{n+1} \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U) \tag{15}$$
   Montrer par récurrence que $u_n \in L^\infty(U)$ pour tout n et que (u_n) est bien définie (on pourra appliquer le résultat de l'exercice 2).
   (b) Justifier que (u_n) est croissante (on pourra appliquer le résultat de l'exercice 1)
   (c) Justifier $u_n \leq \bar{u}$ pour tout n.
   (d) Montrer l'existence d'une solution à (14).
2. Soit λ_1 la première valeur propre de L et $w_1 \in H_0^1(U)$ le vecteur propre correspondant. On rappelle que w_1 ne change pas de signe sur U : quitte à changer w_1 en son opposé, on supposera $w_1 \geq 0$. Justifier que $\lambda_1 > 0$.
3. Montrer qu'il existe $\lambda^* > 0$ dépendant de f, λ_1, w_1 tel que l'équation (14) n'a *pas de solution* pour $\lambda > \lambda^*$. On pourra tester (14) contre w_1.
4. On suppose $f \in L^\infty(U)$ et $a_{ij} \in C^m(\overline{U})$ pour tout $m \geq 0$. Soit $z \in H_0^1(U)$ la solution faible de $Lz = 1$. Justifier $z \in C(\overline{U})$.
5. Montrer, pour λ assez petit, l'existence d'une sur-solution $\bar{u} \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U)$ de (14) (on pourra chercher $\bar{u}$ de la forme $\bar{u} = Cz$ pour $C > 0$.)

2. Rappel : une équation aux dérivées partielles, d'ordre deux par exemple, du type $F(D^2u, Du, u, x) = 0$, est *linéaire* si F est linéaire en ses arguments, *semi-linéaire* si on peut écrire $F(X, p, u, x) = \varphi(x, X) + G(p, u, x)$ où $X \mapsto \varphi(x, X)$ est linéaire pour tout x, *quasi-linéaire* si F est linéaire en D^2u à coefficients dépendants de x, u, Du, *complètement non-linéaire* si F est non-linéaire en D^2u