Feuille TD 6

M1 EDP 2016

Exercice 1. Variété caractéristique de l'équation des ondes

Soit l'équation des ondes

$$Lu \equiv \partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = 0 \tag{1}$$

dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que chaque composante du système suivant

$$\mathcal{L}U = \partial_t U + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_{x_1} U + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_{x_2} U = 0, \tag{2}$$

   où U est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, est solution de (1).
2. Donner les symboles de L et $\mathcal{L}$.
3. Donner les variétés caractéristiques de L et $\mathcal{L}$.

Exercice 2. Variété caractéristique - Ensemble caractéristique

Soit

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i + c$$

un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ une hypersurface régulière (variété C^∞ de dimension $d-1$) de normale unitaire $\nu(x)$ en tout point $x \in \Gamma$. Si $x_0 \in \Gamma$, on a un système de coordonnées locales (x, t) représentant le point $x + t\nu(x)$ de $\mathbb{R}^d$ pour x proche de x_0 et t proche de 0. On se donne un ouvert U décrit dans ces coordonnées par

$$x \in \Gamma, \quad |x - x_0| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < t < 0.$$

On considère la possibilité de résoudre localement, soit dans U, l'équation $Lu = 0$ avec données de Cauchy

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1 \text{ sur } \Gamma \cap \overline{U}, \tag{3}$$

où g_0, g_1 sont des fonctions régulières données.

1. Quel est le symbole principal σ_2 de L ? Quelle est la variété caractéristique $\mathrm{Car}(L)$ de L ?
2. *Définition :* on dit que Γ est *non-caractéristique* (au voisinage de x_0) si $\nu(x) \notin \mathrm{Car}(L)$ pour x au voisinage de x_0.

   Pour simplifier [1] on va considérer à partir de maintenant la géométrie plate

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^d ; x_d = 0\}, \quad \nu(x) = -e_d, \quad x_0 = 0, \quad U = B_\varepsilon \cap \{x_d > 0\}.$$

   Que signifie alors Γ non-caractéristique ?

1. voir Evans, PDE, chap. 4.6 pour le cas général

3. En notant $x = (\bar{x}, x_d)$ le point courant de $\mathbb{R}^d$, supposons qu'on cherche u solution de $Lu = 0$ vérifiant (3) sous forme de série

$$u(\bar{x}, x_d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\bar{x})}{n!} x_d^n. \tag{4}$$

   Qu'est-ce que $u_n(\bar{x})$?

4. Montrer qu'on peut formellement calculer tous les $u_n(\bar{x})$ à partir des données de Cauchy (3) et de l'équation $Lu = 0$.

Remarque : l'existence, sous certaines conditions, de solution analytique d'EDP pour des données de Cauchy analytiques est l'objet du Théorème de Cauchy-Kowalevsky, voir Evans, PDE, chap. 4.6 de nouveau.

Exercice 3. Direction hyperbolique

Cet exercice est une suite de l'exercice 2, qui montre que la détermination de solutions sous forme (4) n'est pas toujours satisfaisante. Soit $d = 2$ et

$$L = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2.$$

Soit $\Gamma = \{x_2 = 0\}$, $\nu = -e_2$.

1. Justifier que $-e_2$ est non-caractéristique (donc Γ non-caractéristique).
2. Montrer que $-e_2$ n'est pas une direction hyperbolique de L.
3. On prend

$$g_0(x_1) = a\sin(\alpha x_1), \quad g_1(x_1) = 0. \tag{5}$$

   Montrer que la mise en oeuvre de la méthode de l'exercice 2 fournit la solution

$$u(x_1, x_2) = a\sin(\alpha x_1)\cosh(\alpha x_2).$$

4. Montrer, en admettant [2] que la mise en oeuvre de la méthode de l'exercice 2, définit une application $(g_0, g_1) \mapsto u$, que cette dernière n'est pas continue lorsqu'on considère la norme C^0 (au départ et à l'arrivée).

Exercice 4. Système strictement hyperbolique en dimension 1

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose le système différentiel $\partial_t u + A\partial_x u$ strictement hyperbolique (l'inconnue $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$).

1. Qu'est-ce que cela signifie quant à A ?

2. on peut le justifier par des calculs et considérations sur les rayons de convergence de g_0 et g_1

2. Soit $a \in C^1(\mathbb{R})$. Donner la solution du problème

$$\partial_t u + A\partial_x u = 0 \text{ dans } (0,+\infty)\times\mathbb{R} \tag{6}$$

satisfaisant

$$u(0,x) = a(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Exercice 5. Système hyperbolique symétrisable en dimension $d \geq 1$

Soit $n, d \geq 1$. L'entier d est la dimension d'espace, n le nombre d'inconnues dans l'équation

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j u(t,x) = 0, \tag{8}$$

où les matrices $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, pour $s \geq 1$, la condition initiale

$$u(0,x) = a(x), \quad a \in H^s(\mathbb{R}^d)^n, \tag{9}$$

où (rappel)

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^d); \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} < +\infty \right\}, \quad \|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|k|^2)^s |\hat{v}(k)|^2 dk.$$

Le propos de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy (8)-(9) dans H^s sous l'hypothèse que le système est *symétrisable*, à savoir : il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $j = 1, \dots, d$, la matrice SA_j soit symétrique.

1. Montrer que, si $u \in C(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d)^n)$ satisfait (8)-(9), alors

$$\hat{u}(t,k) = e^{-itA(k)}\hat{a}(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}^d, \quad \text{où } A(k) := \sum_{j=1}^{d} k_j A_j. \tag{10}$$

2. Montrer qu'on peut écrire $A(k) = P(k)D(k)P(k)^{-1}$ où $D(k)$ est diagonale réelle et les matrices de passage $P(k)$ ont la propriété de bon conditionnement

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^d} \|P(k)\| \|P(k)^{-1}\| < +\infty,$$

pour une norme matricielle $\|\cdot\|$ donnée. On pourra introduire la racine carrée R de S^{-1}.

3. En déduire la borne

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^d} \|e^{iA(k)}\| < +\infty. \tag{11}$$

4. Définir une application $S(t)\colon a \mapsto u(t)$ de $H^s(\mathbb{R}^d)^n$ dans lui-même donnant la solution

$$u \in C(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d)^n)$$

de (8)-(9).

5. On suppose les matrices A_j symétriques. Montrer que $S(t)$ préserve la norme L^2.

Remarque 1 : en introduisant la notion de solution faible (ou solution "au sens des distributions"), on pourrait résoudre (8)-(9) dans H^s pour tout $s \in \mathbb{R}$, en particulier, pour $s = 0$, dans L^2. Une autre manière, un peu plus abstraite, de résoudre dans L^2, est d'étendre par densité l'opérateur $S(t)\colon H^1 \subset L^2 \to H^1 \subset L^2$ en utilisant la dernière question.

Remarque 2 : on peut montrer l'existence d'un cône de dépendance des solutions, Voir *Multi-dimensional Hyperbolic PDE*, Sylvie Benzoni-Gavage, Denis Serre, chapitre 1.3.1