Fiche TD 7

M1 EDP 2016

Exercice 1. Fermeture d'un opérateur non borné

Soit H un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $A\colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On suppose que A est *symétrique* :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \tag{1}$$

pour tout $u, v \in D(A)$.

1. Soit
$$\mathrm{Gr}(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\} \subset H \times H$$
le graphe de A. Montrer que la fermeture $\overline{\mathrm{Gr}(A)}$ de $\mathrm{Gr}(A)$ dans $H \times H$ est encore un graphe [1].
2. On définit $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ comme l'opérateur non-borné de graphe $\overline{\mathrm{Gr}(A)}$. Montrer que $\overline{A}$ est fermé, symétrique, et étend [2] l'opérateur A.
3. Montrer que A est dissipatif [3] si, et seulement si, $\overline{A}$ l'est.

Exercice 2. Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert

Soit H un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $A\colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On munit $H \times H$ du produit hermitien

$$((u, v), (w, z)) \mapsto \langle u, w \rangle + \langle v, z \rangle$$

et on définit U, l'opérateur unitaire "rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$" sur $H \times H$ par

$$U(u, v) = (v, -u).$$

1. Soit
$$\mathrm{Gr}(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\} \subset H \times H$$
le graphe de A. Soit $\mathrm{Gr}^* = U(\mathrm{Gr}(A)^\perp)$. Montrer que Gr^* est un graphe fermé. Cela définit un opérateur $(A^*, D(A^*))$ qu'on appelle l'adjoint de A.

---

1. Rappel : $E \subset H \times H$ est un graphe si une ligne verticale ne recontre qu'un point de E au plus, à savoir : pour tout $z, z' \in E$, $p_1(z) = p_1(z')$ implique $p_2(z) = p_2(z')$ où p_1 est la projection sur la première composante et p_2 la projection sur la deuxième composante. Dans le cas où E est un espace vectoriel il suffit de montrer que $p_1(z) = 0$ implique $p_2(z) = 0$.
2. Rappel : $(B, D(B))$ étend $(A, D(A))$ si $D(A) \subset D(B)$ et B est égal à A en restriction à $D(A)$. Autrement dit, $\mathrm{Gr}(A) \subset \mathrm{Gr}(B)$.
3. Rappel : cela signifie $\mathrm{Re}\langle Au, u \rangle \leq 0$ pour tout $u \in D(A)$

2. Montrer que $v \in D(A^*)$ si, et seulement si, l'application $T_v \colon u \mapsto \langle Au, v\rangle$ est continue sur $D(A)$ muni de la norme $\|\cdot\|$. Dans ce cas T_v s'étend en une forme linéaire continue sur H. En vertu du Théorème de Riesz, T_v peut être représenté par un élément de H : quel est ce dernier ?
3. Montrer que A est symétrique si, et seulement si, A^* étend A.
4. On suppose A symétrique. On note $\overline{A}$ la fermeture de A (voir Exercice 1). Justifier $A^{**} = \overline{A}$ et $A^* = (\overline{A})^*$.
5. On suppose de plus A fermé. Justifier $A = A^{**}$. Montrer l'identité

$$\mathrm{Ker}(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}.$$

En déduire les identités suivantes

$$\mathrm{Ker}(A^*) = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}, \quad (\mathrm{Ker}(A))^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A^*)}, \quad (\mathrm{Ker}(A^*))^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A)}.$$

Exercice 3. Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert (suite)

Définition 1 *Soit $A \colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine dense. On dit que*

— *A est auto-adjoint si $A = A^*$ (noter que cela implique que A est symétrique et fermé),*

— *A est essentiellement auto-adjoint si A est symétrique et sa fermeture $\overline{A}$ est auto-adjoint.*

1. Soit $A \colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine dense, symétrique, qui est maximal dissipatif, *i.e.* A est dissipatif :

$$\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A),$$

et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = H$.

   (a) Montrer que $R(\lambda_0) = (\lambda_0 - A)^{-1}$ est auto-adjoint.

   (b) Montrer que A est auto-adjoint.

2. Soit $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A_0) = H_0^1 \cap H^2(0,1)$ sur $H = L^2(0,1)$. Montrer que A_0 est auto-adjoint (on pourra appliquer la question précédente).
3. Soit maintenant $A_1 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A_1) = C_c^2(0,1)$ sur $H = L^2(0,1)$ (attention à la différence de domaine !).

   (a) Montrer que A_1 est symétrique et que $-A_1$ est dissipatif. Déterminer la fermeture $\overline{A_1}$. Justifier que $D(\overline{A_1})$ est un sous ensemble strict de $D(A_0)$.

   (b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $u_z \colon z \mapsto e^{zx}$ est dans $D(A_1^*)$ et que $A_1^* u_z = -z^2 u_z$. En déduire que A_1^* n'est pas symétrique, que $-A_1^*$ n'est pas dissipatif, puis que A_1 n'est pas essentiellement auto-adjoint.

Exercice 4. Semi-groupe et inégalité d'interpolation

1. Soit A le générateur d'un semi-groupe de contraction $S(t)$ sur un espace de Banach X. On définit
$$D(A^2) = \{u \in D(A); Au \in D(A).$$
Montrer que si $u \in D(A^2)$, alors
$$\|Au\|^2 \leq 4\|A^2u\|\|u\|. \tag{2}$$
On commencera par justifier l'identité
$$S(t)u - u = tAu + \int_0^t (t-s)S(s)A^2 u ds. \tag{3}$$

2. Soit X l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}$, muni de la norme du sup. Soit $S(t)$ défini par
$$S(t)f(x) = f(x+t).$$
Montrer que $S(t)$ est un semi-groupe de contraction sur X, déterminer A, puis détailler (2) dans ce cas.

Exercice 5. Ensembles spectraux d'opérateurs non bornés

1. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = L^2(0,1)$, $Au = u'$, $D(A) = H^1(0,1)$. Justifier d'autre part que A est fermé.
2. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = L^2(0,1)$, $Au = u'$,
$$D(A) = \left\{u \in H^1(0,1); u(0) = 0\right\}.$$
3. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = l^2(\mathbb{N})$, $(Au)_n = \mu_n u_n$, $D(A)$ étant l'ensemble des u tels que $Au \in l^2(\mathbb{N})$. Ici (μ_n) est une suite arbitraire de nombres complexes. Justifier d'autre part que A est fermé. Déduire de cet exemple que tout fermé de $\mathbb{C}$ est l'ensemble spectral d'un opérateur non borné.