Feuille de TD 8

M1 EDP 2016

Exercice 1. Equations de la chaleur non-linéaires

Soit $d \geq 1$. Soit U un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Pour $T > 0$, on note $Q_T = U \times (0,T)$.

1. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\partial_t u - \Delta u = -\left[\int_U |u|^2 dx\right] u \text{ dans } Q_T \tag{1a}$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial U \times (0,T), \tag{1b}$$
$$u = u_0 \text{ sur } U \times \{0\}, \tag{1c}$$

   où $u_0 \in L^2(U)$. Que dire de (1) ? On introduira l'opérateur non-borné $A = \Delta$ de domaine $H_0^1(U) \cap H^2(U)$ et le semi-groupe associé (en justifiant l'existence de ce dernier). On discutera en particulier la question de l'existence globale des solutions.

2. Soit $F\colon U \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornées et à divergence nulle. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\partial_t u - \Delta u = -\left[\int_U |u|^2 dx\right] F \cdot \nabla u \text{ dans } Q_T \tag{2a}$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial U \times (0,T), \tag{2b}$$
$$u = u_0 \text{ sur } U \times \{0\}, \tag{2c}$$

   où $u_0 \in L^2(U)$.

   (a) On introduit l'opérateur non-borné $A = \Delta$ de domaine $H_0^1(U) \cap H^2(U)$ et on note $S(t)$ le semi-groupe de contraction associé. Justifier l'existence de $S(t)$.

   (b) Montrer que, pour tout $u_0 \in L^2(U)$, pour tout $t > 0$,

$$\|\nabla S(t) u_0\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{t^{1/2}} \|u_0\|_{L^2(U)}. \tag{3}$$

   Il y a plusieurs façons de montrer (3) : une possibilité est de faire les estimations d'énergie adéquates (pour $u_0 \in D(A^2)$ par exemple), une autre possibilité est d'exprimer $S(t)u_0$ à l'aide d'une base hilbertienne de $L^2(U)$ constituée de valeurs propres du Laplacien.

   (c) On pose $\Sigma(t)u = S(t)(F \cdot \nabla u)$. Montrer que, pour tout $u \in L^2(U)$,

$$\|\Sigma(t)u\|_{L^2(U)} \leq M \left(\frac{1}{t^{1/2}} + 1\right) \|u\|_{L^2(U)}, \tag{4}$$

   où M est une certaine constante.

(d) On réécrit (2) comme une équation de point fixe $u = \Phi(u)$ dans

$$Y = C([0,T]; L^2(U)),$$

avec

$$(\Phi u)(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \Sigma(t-s)G[u](s)ds, \quad G[u] := \|u\|^2_{L^2(U)} u. \tag{5}$$

Montrer l'existence locale de solutions par le théorème du point fixe de Banach (*cf.* cours)

(e) Montrer que, si $u_0 \in D(A)$, alors la solution obtenue est dans $C^1([0,T]; L^2(U))$ et $C([0,T]; D(A))$ et est solution classique. Une démonstration possible repose sur la convergence de l'itération $u^{n+1} = \Phi(u^n)$, $u^0 = u_0$, vers le point fixe $u = \Phi(u)$.

(f) Discuter l'existence globale.

Exercice 2. Equation de la chaleur non-linéaire - Exposant critique de Fujita

Soit $d \geq 1$. Soit

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ et soit, pour $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$, $S(t)u = K_t * u$. On admet (propriété des gaussiennes)

$$K_t * K_s = K_{t+s}, \quad t, s \geq 0.$$

Soit X l'espace des fonctions bornées uniformément continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme du sup.

1. Montrer que $(S(t))$ induit un semi-groupe de contraction sur X. Quel est son générateur (opérateur et domaine) ?
2. Soit $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Justifier

$$S(t)\varphi(u) \geq \varphi(S(t)u), \tag{6}$$

pour tout $u \in X$, pour tout $t \geq 0$.

3. Soit $p \geq 1$. On considère le problème de Cauchy

$$\partial_t u - \Delta u = |u|^{p-1}u \text{ dans } \mathbb{R}^d \times (0,T) \tag{7a}$$
$$u = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \tag{7b}$$

pour $u_0 \in X$. Justifier l'existence-unicité d'une solution intégrale maximale $u \in C([0, T^*(u_0)[; X)$.

4. On suppose que $u_0 \in X$ est une fonction positive : $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il en est de même de u. On pourra utiliser (6) avec $\varphi(u) = u^-$.
5. On suppose toujours $u_0 \in X$ positive. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$u(t) \geq \frac{t^{1+p+\cdots+p^{n-1}}}{(1+p)^{p^{n-2}}(1+p+p^2)^{p^{n-3}}\cdots(1+p+\cdots+p^{n-1})}\left[S(t)u_0\right]^{p^n}, \tag{8}$$

   pour $0 \leq t < T^*(u_0)$. On pourra utiliser (6) avec $\varphi(u) = |u|^p$.
6. En déduire

$$t^{\frac{1}{p-1}} S(t)u_0 \leq C(p), \tag{9}$$

   pour $0 \leq t < T^*(u_0)$, où $C(p)$ est une constante finie.
7. Justifier $\lim_{t\to+\infty} t^{d/2} S(t)u_0(x) = (4\pi)^{-d/2}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
8. On définit l'exposant critique de Fujita par

$$p_F = 1 + \frac{2}{d}.$$

   Montrer que, si $1 < p < p_F$, alors $T^*(u_0) < +\infty$ pour tout $u_0 \in X \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ positive non identiquement nulle.