M1 EDP 2017

1 Équation de transport

Soit $b \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur borné.

1. Justifier que le flot $\Phi_t(x)$ de l'équation différentielle $\dot{x} = b(x)$ est défini globalement en temps. On rappelle que Φ_t définit un C^1-difféomorphisme $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

2. On note Φ^t la fonction inverse de $x \mapsto \Phi_t(x)$. Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que
$$u\colon (t,x) \mapsto u_0(\Phi^t(x))$$
est solution de l'équation de transport
$$\partial_t u(t,x) + b(x)\cdot\nabla_x u(t,x) = 0 \quad \text{pour tous } t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$
et satisfait la condition initiale : $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2 Équation de la chaleur par séries de Fourier

On note $\mathbb{T}^n$ le tore de dimension n (classes d'équivalence $\bar{x}$ pour la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^n$). Pour $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction $\varphi \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^k sur $\mathbb{T}^n$ (noté $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^p)$) si la fonction

$$x \ni \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(\bar{x})$$

est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, on notera aussi

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx = \int_{[0,1]^n} f(\bar{x}) dx.$$

On rappelle la formule de Green dans ce cadre périodique :

$$\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = -\int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{div}(\mathbf{a})(x)\ \varphi(x) dx, \tag{2}$$

pour toutes fonctions $\mathbf{a} \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

Pour $p \geq 1$, on note $L^p(\mathbb{T}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont $\mathbb{Z}^n$ périodique et satisfont

$$\int_{[0,1]^n} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Si $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ et $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx = \langle u, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

le k-ième coefficient de Fourier de u. Ici $e_k(x) := e^{2\pi i k \cdot x}$.

1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Soit $u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$ satisfaisant

$$u \in C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{T}^n), \tag{3}$$
$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad \text{pour tout } (t,x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{T}^n, \tag{4}$$
$$u(0) = u_0. \tag{5}$$

Remarque : Dans (5), $u(0)$ est la valeur en $t = 0$ de l'application $t \mapsto u(t)$ tracée dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Considérer la valeur en 0 a un sens puisque l'application est continue par hypothèse.

En passant en Fourier, montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-4\pi^2 |k|^2 t} \hat{u}_0(k) e_k, \tag{6}$$

l'égalité ayant lieu dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

2. Réciproquement, montrer que la formule (6) définit une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$$

   satisfaisant (3), (4), (5).

3. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \int_{\mathbb{T}^n} u_0(x)dx$$

   dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

4. Qu'en déduit-on au sujet de la stabilité dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ de la solution nulle de (4)-(5) ?

3 Probas et EDP

Un champ très actif dans les probabilités est l'étude des limites d'échelles de processus probabilistes, souvent décrites à l'aide d'EDP ("limites hydrodynamiques"). En voici un exemple en dimension 1 (généralisable à toute dimension), où seule la question 1 demande des connaissances probabilistes très élémentaires.

Soit $\delta > 0$. Soit la marche au hasard sur $\delta\mathbb{Z}$ définie de la manière suivante :

i) $Z_0 = 0$,

ii) pour $n \geq 1$, Z_n étant connu, on tire une variable aléatoire X_{n+1} indépendante de $Z_1, \ldots, Z_n$ de loi $\mathbb{P}(X_{n+1} = \pm 1) = \frac{1}{2}$ et on pose $Z_{n+1} = Z_n + \delta X_{n+1}$.

On construit ainsi la marche aléatoire (Z_n) issue de 0. La marche aléatoire issue de x est simplement $(x + Z_n)$.

1. Soit $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$. Soit $U(n,x) = \mathbb{E}\varphi(x + Z_n)$. Montrer que

$$U(n+1,x) = \frac{1}{2}\left[U(n,x-\delta) + U(n,x+\delta)\right]. \tag{7}$$

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = n\delta^2$, et soit u_δ (remise à l'échelle de U) la fonction définie par

$$u_\delta(t,x) = U(n,x), \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$\frac{u_\delta(t+\delta^2,x) - u_\delta(t,x)}{\delta^2} - \frac{u_\delta(t,x-\delta) + u_\delta(t,x+\delta) - 2u_\delta(t,x)}{2\delta^2} = 0, \tag{8}$$

$$u_\delta(0,x) = \varphi(x), \tag{9}$$

pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Quelle est la limite formelle de (8)-(9) lorsque $\delta \to 0$?

4 L'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$

Soit ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^3$. On cherche une fonction $u(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$-\Delta u = \rho, \tag{10}$$

sous les conditions suivantes de décroissance à l'infini:

$$x \mapsto |x|\, u(x) \text{ bornée}, \qquad x \mapsto |x|^2\, \nabla u(x) \text{ bornée}. \tag{11}$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ et calculer son Laplacien.

2. Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$. On note $n(x)$ le vecteur normal unitaire sortant en tout point $x \in \partial\Omega$ et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. On se donne deux fonctions u et v de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$. À l'aide de la formule de Stokes, démontrer la formule de Green pour le Laplacien:
$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\; dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma(x).$$

3. Pour $0 < \alpha < \beta$, on définit la sphère et l'anneau suivants :
$$S_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ |x| = \alpha\right\}, \qquad A_{\alpha,\beta} = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \leq |x| \leq \beta\right\}$$
Soit $0 < \varepsilon < R$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (11). Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, montrer l'identité
$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon} u(x+y)\; d\sigma(y) = \int_{A_{\varepsilon,R}} \frac{(-\Delta u)(x+y)}{|y|}\; dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

4. Montrer que l'unique solution de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ de (10), satisfaisant (11), s'écrit
$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\; dy. \tag{12}$$

5. Soit $p \in [1, 3[$. Montrer qu'il existe une constante C_p indépendante de ρ telle que
$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_p \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{p/3} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{1-p/3}.$$
Indication : on pourra distinguer les domaines $|x-y| > r$ et $|x-y| \leq r$ dans (12) puis optimiser en r.

6. Montrer la formule
$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}\; dxdy.$$

5 Noyau de Poisson sur le demi-espace - I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $x = (\bar{x}, x_n)$ le point courant dans $\mathbb{R}^n$, avec $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et on note $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace ouvert

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n > 0\}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n_+$, on note $\check{x} = (\bar{x}, -x_n)$. Soit Φ la solution fondamentale de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que, à $x \in \mathbb{R}^n_+$ fixé, la fonction $W(y) = -\Phi(\check{x} - y)$ est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta W(y) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+, \\ W(y) &= -\Phi(x - y), \quad y \in \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

   Par conséquent $G(x, y) := -\Phi(\check{x} - y)$ est la fonction de Green du Laplacien sur $\mathbb{R}^n_+$.

2. En déduire l'expression suivante du noyau de Poisson du Laplacien sur $\mathbb{R}^n_+$:

$$K(x, y) = \frac{2}{S_n} \frac{x_n}{|x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+,$$

   où S_n est la mesure de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

   Rappel: $K(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial \nu_y} G(x, y)$.

3. Soit $g \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y, 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$. On admet (voir exercices additionnels pour la preuve) que la formule

$$u(x) := \frac{2x_n}{S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy$$

   définit une fonction C^∞ bornée sur $\mathbb{R}^n_+$, solution de l'équation de Laplace $-\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^n_+$, vérifiant la condition au bord

$$\lim u(x) = g(x_0),$$

   où $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ et la limite est prise sur les $x \in \mathbb{R}^n_+$ tendant vers x_0. On suppose que

$$g(y) = |y|,$$

   pour $|y| \leq 1$. Montrer que ∇u n'est pas bornée au voisinage de 0.

   Indication : on pourra évaluer le quotient différentiel $\frac{u(te_n) - u(0)}{t}$ *pour* $t > 0$ *petit.*

6 Principe du maximum

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$-\Delta u \leq 0 \text{ dans } \Omega.$$

On veut montrer qu'on a alors

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x). \tag{13}$$

1. On suppose dans un premier temps

$$-\Delta u < 0 \text{ dans } \Omega.$$

   On suppose d'autre part que u atteint son max sur $\overline{\Omega}$ un un point intérieur $x_0 \in \Omega$. Montrer que (au sens des matrices symétriques)

$$D^2 u(x_0) \leq 0.$$

2. En déduire $\Delta u(x_0) \leq 0$ et une contradiction.

3. Prouver le principe du maximum dans le cas général. On pourra considérer la fonction

$$x \mapsto u(x) + \varepsilon e^{x_1}, \quad \varepsilon > 0.$$

7 L'équation de la chaleur avec terme source - Effet régularisant

On note

$$\Phi_t \colon x \mapsto \Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que

$$\|\Phi_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p t^{-\frac{n}{2p'}},$$

pour tout $t > 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$, où p' est l'exposant conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et C_p est une constante dépendant de p.

2. Soit $T > 0$. Soit $f \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ où les exposants $r, p \in [1, +\infty]$ satisfont la condition

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 2. \tag{14}$$

Montrer que l'application

$$v \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \int_0^t (f(s) * \Phi_{t-s})(x) ds \tag{15}$$

est bien définie, avec

$$\|v\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \leq C_T \|f\|_{L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))}, \tag{16}$$

où la constante C_T dépend de T, r, p, n.

On rappelle l'inégalité de Young sur $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$):

$$\|\varphi * \theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \leq \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \|\theta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{17}$$

pour tout $p \in [1, +\infty]$.

3. Qu'en déduit-on au sujet de la solution de l'équation de la chaleur avec terme source dans $\mathbb{R}^n$?

4. Même question dans le cas $f = \mathrm{div}_x(G)$. On suppose que les composantes G_i de G satisfont $G_i \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ et que la condition suivante (dite de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin) est satisfaite :

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 1. \tag{18}$$

8 Estimations d'énergie

Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t \geq 0$.

1. Montrer l'identité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{19}$$

2. Montrer l'identité

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + t\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^t s\|\Delta u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{20}$$

9 Inégalité de Varopoulos-Carne

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (classe de Schwartz) et $\varphi \colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ est une fonction à croissance au plus pôlynomiale en $-\infty$, on note $\varphi(\Delta)f$ la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$\mathcal{F}\big[\varphi(\Delta)f\big](\xi) = \varphi(-|\xi|^2)\mathcal{F}f(\xi),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $e^{t\Delta}f$?

2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$?

3. En utilisant la formule de Kirchhoff, montrer que
$$\cos(t\sqrt{-\Delta})f(x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{B(x,t)} \Delta f(y)dy + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S(x,t)} f(y)d\sigma(y). \tag{21}$$

4. Montrer que, si f est à support compact, alors, pour tout $t \geq 0$, $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$ est à support compact et son support est à distance au plus t du support de f. La distance entre deux ensembles E et G de $\mathbb{R}^n$ est définie par
$$d(E, G) = \inf\left\{|x-y|; x \in E, y \in G\right\},$$
où $|\cdot|$ est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

5. Montrer la formule
$$e^{-\frac{t}{2}z^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}}\cos(sz)ds, \quad z > 0.$$
On rappelle la transformée de Fourier de la Gaussienne en dimension m : $\mathcal{F}G(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, où $G(x) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

6. En déduire
$$e^{t\Delta/2}f = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}}\cos(s\sqrt{-\Delta})fds, \tag{22}$$
pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

7. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ des fonctions à supports compacts, notés respectivement F et G. Montrer l'inégalité de Varopoulos-Carne :
$$\langle e^{t\Delta/2}f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi d(F,G)^2}}\exp\left(-\frac{d(F,G)^2}{2t}\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{23}$$

Remarque : l'inégalité de Varopoulos-Carne est vraie en toute dimension (même preuve que ci-dessus, excepté qu'on emploie la formule de représentation ad hoc pour $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$).

10 Limite Hydrodynamique

Soit $N \geq 1$. Soit $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire $x \cdot y$. On note $|x|$ la norme euclidienne associée. Pour $t > 0$, $x, y, v, w \in \mathbb{R}^n$, On pose

$$D(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)t - (1 - e^{-t})^2,$$
$$A(t, x, v) = \frac{1}{D(t)} \int_0^t |(1 - e^{-s})v - e^{-s}x|^2 ds$$

et

$$G_t(x, v; y, w) = \frac{1}{(4\pi)^N D(t)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} A(t, x - y - (1 - e^{-t})w, v - e^{-t}w)\right]. \quad (24)$$

On *admet*[1] que G_t fournit la solution fondamentale de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad Q(f) := \mathrm{div}_v(\nabla_v f + vf), \quad (25)$$

au sens où, pour tout $f_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ("in" pour "initiale"), la fonction

$$f(t, x, v) := \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n} G_t(x, v; y, w) f_{\text{in}}(y, w) dy dw$$

est l'unique fonction

$$f \in C(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)) \cap C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \quad (26)$$

satisfaisant (25) dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et satisfaisant la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} \|f(t) - f_{\text{in}}\|_{L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} = 0. \quad (27)$$

1. **Solution particulière.** On note $\mathcal{M}$ (lettre $\mathcal{M}$ pour "Maxwellienne", mais c'est aussi la gaussienne) la fonction

$$\mathcal{M}(v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}.$$

Montrer que $(x, v) \mapsto \mathcal{M}(v)$ est une solution stationnaire de (25).

[1] ce qui se montre par le calcul direct, mais c'est long, ou bien, plus directement, par l'interprétation probabiliste de l'équation (25)

2. **Perturbation.** Pour $\varepsilon > 0$ on se donne une donnée initiale f_{in} de la forme

$$f_{\text{in}}(x,v) = \rho_{\text{in}}(\varepsilon x)\mathcal{M}(v).$$

où $\rho_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_b^1(\mathbb{R}^N)$, $\rho_{\text{in}}(0) = 1$. Pour ε petit et x borné, $f_{\text{in}}(x,v)$ est proche de l'équilibre $\mathcal{M}(v)$. On s'attend à voir la solution de (25)-(27) s'éloigner de $\mathcal{M}(v)$ au bout d'un temps assez long. On effectue le réechelonnement suivant

$$f^\varepsilon(t,x,v) = f(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, v). \tag{28}$$

Montrer que f^ε est solution de l'équation

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} Q(f^\varepsilon). \tag{29}$$

3. **Limite du noyau.** Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_{\varepsilon^{-2}t}(\varepsilon^{-1}x, v; \varepsilon^{-1}y, w)\mathcal{M}(w)dw = \Phi_t(x-y)\mathcal{M}(v), \tag{30}$$

où Φ_t est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$.

4. **Limite hydrodynamique.** Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $x, v \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f^\varepsilon(t,x,v) = \rho(t,x)\mathcal{M}(v), \tag{31}$$

où ρ est la solution d'un problème que l'on précisera.

5. **Méthode des moments.** On se propose de retrouver (de manière formelle) l'équation dont ρ est solution en admettant (31) en utilisant une méthode de moments. Les trois premiers *moments* de f^ε sont les quantités suivantes (attention au facteur ε^{-1} dans J_ε)

$$\rho^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} f^\varepsilon(v)dv,\ J^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} v f^\varepsilon(v)dv,\ K^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v f^\varepsilon(v)dv,$$

où $(v \otimes v)_{ij} = v_i v_j$.

   (a) Montrer en utilisant (31) que

$$\rho^\varepsilon \simeq \rho, \quad K^\varepsilon \simeq K\rho,\ K := \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v\mathcal{M}(v)dv.$$

(b) Montrer que

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \mathrm{div}_x(J^\varepsilon) = 0, \tag{32}$$

$$\partial_t J^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{div}_x K^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} J^\varepsilon. \tag{33}$$

(c) Pour $\varphi \in C([0,t])$, déterminer la limite de

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{t-s}{\varepsilon^2}}\varphi(s)ds. \tag{34}$$

(d) En déduire $J^\varepsilon \simeq -K\nabla_x \rho$ et conclure.

Remarque : l'équation (25) est une équation dite cinétique. Elle résulte d'une description statistique de la matière, à une échelle intermédiaire, dite mésoscopique, entre l'échelle moléculaire (description microscopique) et l'échelle dite fluide (description macroscopique). L'équation de Boltzmann est probablement la plus célèbre des équations cinétiques. Ici, (25) est l'équation dite de Fokker-Planck. La limite (31), qui établit un lien (après remise à l'échelle) entre la description mésoscopique et la description macroscopique est un exemple de limite hydrodynamique.

11 Opérateurs différentiels et symbole

Donner l'ordre et les symboles des opérateurs différentiels suivants et préciser s'ils sont elliptiques ou non.

1. $Lu(x) = -\Delta u(x) + b \cdot \nabla u(x) + cu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $Lu(t,x) = \partial_t u(t,x) - i\Delta u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $Lf(x,v) = v \cdot \nabla_x f(x,v) - \Delta_v f(x,v)$, $(x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

12 Estimations elliptiques

Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (classe de Schwartz), on note

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{ix\cdot\xi} dx$$

la transformée de Fourier de u. Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ comme la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de la norme

$$\|u\|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}, \quad \langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Soit $Lu(x) = cu(x) - \Delta u(x)$ où $c > 0$. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\|u\|_{H^{s+2}} \leq C \|Lu\|_{H^s}, \tag{35}$$

pour une constante C qu'on précisera.

13 Une Estimation hypoelliptique – I

On note (x, v) la point courant dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (classe de Schwartz), on note

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x, v) e^{i(x \cdot \xi + v \cdot \eta)} dx dv$$

la transformée de Fourier de f par rapport aux deux variables (x, v). Pour $s \geq 0$, on note $\langle D_x \rangle^s$ et $\langle D_v \rangle^s$ les opérateurs de symboles respectifs $\langle \xi \rangle^s$ et $\langle \eta \rangle^s$, où

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \langle \eta \rangle = (1 + |\eta|^2)^{1/2}.$$

Soit les opérateurs

$$L_0 f(x, v) = v \cdot \nabla_x f(x, v), \quad L f(x, v) = v \cdot \nabla_x f(x, v) - \Delta_v f(x, v).$$

1. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que $L_0 f = g$. Montrer que $\xi \cdot \nabla \hat{f}(\xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta)$.

2. On introduit une variable de temps fictive t et $\hat{f}(t, \xi, \eta) := \hat{f}(\xi, \eta)$. Montrer que $\hat{f}(t, \xi, \eta)$ satisfait l'équation

$$\partial_t \hat{f}(t, \xi, \eta) + \xi \cdot \nabla \hat{f}(t, \xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta)$$

En déduire, pour tout $t \geq 0$,

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \hat{f}(\xi, \eta - t\xi) + \int_0^t \hat{g}(\xi, \eta - s\xi) ds,$$

puis

$$|\hat{f}|^2(\xi, \eta) \leq 2|\hat{f}|^2(\xi, \eta - t\xi) + 2t \int_0^t |\hat{g}|^2(\xi, \eta - s\xi) ds. \tag{36}$$

3. Soit $r \in]0, 2[$ et soit $\tau > 0$. On note A_τ le domaine[2]

$$A_\tau = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |\eta| \geq 2\tau|\gamma(\xi)| \text{ ou } 2|\eta| \leq \tau|\gamma(\xi)|\}, \quad \gamma(\xi) := |\xi|^{-r/2}\xi.$$

En choisissant $t = \tau|\xi|^{-r/2}$ dans (36), montrer que

$$\iint_{A_\tau} |\xi|^r |\hat{f}|^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \leq \iint_{A_\tau} |\xi|^r |\hat{f}|^2\big(\xi, \eta - \tau\gamma(\xi)\big) d\xi d\eta + 2\tau^2 \|g\|_{L^2}^2, \tag{37}$$

où L^2 désigne l'espace $L^2(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_v^n)$.

[2] on pourra faire un dessin...

4. Soit $\alpha \geq 0$ et soit $r = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$. Montrer que

$$C_{\alpha,\tau} := \sup_{(\xi,\eta)\in A_\tau} \frac{|\xi|^r}{\langle \eta - \tau\gamma(\xi)\rangle^{2\alpha}} < +\infty. \tag{38}$$

5. En déduire

$$\iint_{A_\tau} |\xi|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} |\hat{f}|^2(\xi,\eta) d\xi d\eta \leq C_{\alpha,\tau} \|\langle D_v\rangle^\alpha f\|_{L^2}^2 + 2\tau^2 \|g\|_{L^2}^2. \tag{39}$$

6. Montrer, en considérant deux paramètres τ_1 et τ_2 bien choisis, que

$$\|\langle D_x\rangle^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} f\|_{L^2}^2 \leq C_\alpha \left[\|\langle D_v\rangle^\alpha f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right] \tag{40}$$

   pour une certaine constante C_α.

7. On admet le résultat suivant : pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,

$$Lf = g \Rightarrow \|\langle D_v\rangle^2 f\|_{L^2}^2 \leq C\left[\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right], \tag{41}$$

   pour une certaine constante C. Montrer que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ satisfont $Lf = g$, alors

$$\|\langle D_x\rangle^{\frac{2}{3}} f\|_{L^2}^2 + \|\langle D_v\rangle^2 f\|_{L^2}^2 \leq C_{\text{hypo}} \left[\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right], \tag{42}$$

   pour une certaine constante C_{hypo}.

Remarque : comparer avec le résultat de l'exercice 2. Dans l'exercice 2 on montre un gain de deux dérivées. Ici on obtient un gain de deux dérivées en v et de surcroît un gain de $2/3$ de dérivée en x. Cela est dû à la structure bien particulière de l'opérateur L qui fait qu'une part de la régularité en v se transmet en régularité en x (*cf.* (40)).

14 Principe du maximum faible pour les solutions faibles

Soit U un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit, avec convention de sommation sur les indices répétés, l'opérateur $Lu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u)$. Ici les coefficients a_{ij} sont des fonctions $L^\infty(U)$. On suppose l'opérateur L uniformément elliptique : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, pour presque tout $x \in U$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$. On rappelle le résultat suivant : si $v \in H^1(U)$, alors $v^+ \in H^1(U)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v\geq 0}\nabla v = \mathbf{1}_{v>0}\nabla v$$

p.p. dans U. Soit $f \in L^2(U)$ et $u \in H^1_0(U)$ satisfaisant l'inégalité $Lu \leq f$ au sens faible suivant : pour toute fonction positive $v \in H^1_0(U)$,

$$\int_U a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)dx \leq \int_U f(x)v(x)dx. \tag{43}$$

1. En appliquant (43) à $v = u^+$, montrer que

$$\alpha\|\nabla u^+\|^2_{L^2(U)} \leq \|f^+\|_{L^2(U)}\|u^+\|_{L^2(U)}.$$

2. Soit C_P la constante dans l'inégalité de Poincaré

$$\forall v \in H^1_0(U), \quad \|v\|_{L^2(U)} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^2(U)}. \tag{44}$$

   Montrer que

$$\|u^+\|_{L^2(U)} \leq \frac{C_P^2}{\alpha}\|f^+\|_{L^2(U)}.$$

3. En déduire : $u \in H^1_0(U)$ et $Lu \leq 0$ impliquent $u \leq 0$ p.p. dans U.

15 Un exemple de régularité intérieure

Soit U un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, soit $f \in L^p(U)$ où $p > N/2$ et soit $u \in H_0^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $-\Delta u \leq f$ au sens où

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx \leq \int_U f v dx \tag{45}$$

pour tout fonction positive $v \in H_0^1(U)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante $M_1 \geq 0$ telle que $u \leq M_1$ p.p. On rappelle le résultat suivant : si $v \in H^1(U)$, alors $v^+ \in H^1(U)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v \geq 0} \nabla v = \mathbf{1}_{v>0} \nabla v$$

p.p. dans U. On rappelle[3] aussi l'injection de Sobolev suivante : il existe une constante $C_S \geq 0$ telle que

$$\|v\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|\nabla v\|_{L^2(U)}, \quad \forall v \in H_0^1(U), \tag{46}$$

où 2^* est n'importe quel exposant ≥ 1 si $N \leq 2$ (auquel cas C_S dépend du choix de la valeur de 2^*), $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ si $N > 2$.

1. Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite strictement croissante. On note
$$u_k = (u - a_k)^+, \quad A_k = \{x \in U; u_k(x) > 0\}.$$
Montrer que
$$\int_U |\nabla u_k|^2 dx \leq \|f\|_{L^p(U)} \|u_k\|_{L^q(U)},$$
où q est l'exposant conjugué de p.

2. En déduire
$$\|u_k\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|f\|_{L^p(U)}^{1/2} \|u_k\|_{L^q(U)}^{1/2}.$$

3. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, pour tout $\beta > 0$,
$$\mathbf{1}_{A_k} \leq \frac{u_{k-1}^\beta}{(a_k - a_{k-1})^\beta}.$$

4. En remarquant que $u_k \leq u_{k-1}$, montrer que
$$\|u_k\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|f\|_{L^p(U)}^{1/2} (a_k - a_{k-1})^{-\beta} \|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}^\mu, \quad \beta := \frac{2^*}{2q} - \frac{1}{2}, \quad \mu := \frac{2^*}{2q}. \tag{47}$$

[3] qui se déduit de l'injection de Sobolev $H^1(U) \hookrightarrow L^{2^*}(U)$ et de l'inégalité de Poincaré, cf. (44) ci-dessous

5. Justifier $\mu > 1$.

6. On prend $a_k = (1 - 2^{-k-1})M$ pour une constante $M \geq 1$ à déterminer plus tard. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de C_S, $\|f\|_{L^p(U)}$, p tel que

$$\|u_0\|_{L^{2^*}(U)} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \|u_k\|_{L^{2^*}(U)} = 0 \tag{48}$$

   On pourra passer au log dans l'estimation (47).

7. Si (48) est réalisé, qu'en déduit-on au sujet de u ?

8. Justifier qu'il existe un choix de M assurant $\|u_0\|_{L^{2^*}(U)} < \varepsilon$.

9. Justifier rapidement que la méthode se généralise au cas de l'équation

$$\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = f,$$

   où $a_{ij} \in L^\infty(U)$, où on a utilisé la convention de sommation sur les indices répétés, et où la condition d'ellipticité suivante est satisfaite : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, pour presque tout $x \in U$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$, où on a de nouveau utilisé la convention de sommation sur les indices répétés.

Remarque : on obtient ici une estimation L^∞ dans tout U. Ce n'est donc pas stricto sensu un résultat de régularité *intérieure*. Ce dernier résultat est le suivant : soit $u \in H^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $-\partial_i(a_{ij}\partial_j u) \leq f$ (noter qu'on ne suppose plus $u \in H_0^1(U)$ ici ! On ne sait pas que u est nulle au bord), soit $V \subset U$ avec $\overline{V} \subset U$. Alors il existe une constante M_V telle que $u \leq M_V$ p.p. sur V. La méthode de preuve est similaire à celle ci-dessus, mais il faut introduire des fonctions de troncatures ζ_k convergeant vers la fonction caractéristique de V et tester l'inégalité $-\partial_i(a_{ij}\partial_j u) \leq f$ non pas avec u_k comme à la question 1., mais avec $\zeta_k^2 u_k$, et effectuer un travail additionnel...

16 Variété caractéristique de l'équation des ondes

Soit l'équation des ondes

$$Lu \equiv \partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = 0 \tag{49}$$

dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que chaque composante du système suivant

$$\mathcal{L}U = \partial_t U + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_{x_1} U + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_{x_2} U = 0, \tag{50}$$

   où U est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, est solution de (49).

2. Donner les symboles de L et $\mathcal{L}$.
3. Donner les variétés caractéristiques de L et $\mathcal{L}$.

17 Variété caractéristique - Ensemble caractéristique

Soit
$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{d} b_i\partial_i + c$$
un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ une hypersurface régulière (variété C^∞ de dimension $d-1$) de normale unitaire $\nu(x)$ en tout point $x \in \Gamma$. Si $x_0 \in \Gamma$, on a un système de coordonnées locales (x,t) représentant le point $x + t\nu(x)$ de $\mathbb{R}^d$ pour x proche de x_0 et t proche de 0. On se donne un ouvert U décrit dans ces coordonnées par

$$x \in \Gamma, \quad |x - x_0| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < t < 0.$$

On considère la possibilité de résoudre localement, soit dans U, l'équation $Lu = 0$ avec données de Cauchy

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1 \text{ sur } \Gamma \cap \overline{U}, \tag{51}$$

où g_0, g_1 sont des fonctions régulières données.

1. Quel est le symbole principal σ_2 de L ? Quelle est la variété caractéristique $\mathrm{Car}(L)$ de L ?

2. *Définition :* on dit que Γ est *non-caractéristique* (au voisinage de x_0) si $\nu(x) \notin \mathrm{Car}(L)$ pour x au voisinage de x_0.

   Pour simplifier[4] on va considérer à partir de maintenant la géométrie plate

   $$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^d; x_d = 0\}, \quad \nu(x) = -e_d, \quad x_0 = 0, \quad U = B_\varepsilon \cap \{x_d > 0\}.$$

   Que signifie alors Γ non-caractéristique ?

3. En notant $x = (\bar{x}, x_d)$ le point courant de $\mathbb{R}^d$, supposons qu'on cherche u solution de $Lu = 0$ vérifiant (51) sous forme de série

   $$u(\bar{x}, x_d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\bar{x})}{n!} x_d^n. \tag{52}$$

   Qu'est-ce que $u_n(\bar{x})$?

[4]voir Evans, PDE, chap. 4.6 pour le cas général

4. Montrer qu'on peut formellement calculer tous les $u_n(\bar{x})$ à partir des données de Cauchy (51) et de l'équation $Lu = 0$.

Remarque : l'existence, sous certaines conditions, de solution analytique d'EDP pour des données de Cauchy analytiques est l'objet du Théorème de Cauchy-Kowalevsky, voir Evans, PDE, chap. 4.6 de nouveau.

18 Direction hyperbolique

Cet exercice est une suite de l'exercice 17, qui montre que la détermination de solutions sous forme (52) n'est pas toujours satisfaisante. Soit $d = 2$ et

$$L = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2.$$

Soit $\Gamma = \{x_2 = 0\}$, $\nu = -e_2$.

1. Justifier que $-e_2$ est non-caractéristique (donc Γ non-caractéristique).

2. Montrer que $-e_2$ n'est pas une direction hyperbolique de L.

3. On prend
$$g_0(x_1) = a \sin(\alpha x_1), \quad g_1(x_1) = 0. \tag{53}$$
Montrer que la mise en oeuvre de la méthode de l'exercice 17 fournit la solution
$$u(x_1, x_2) = a \sin(\alpha x_1) \cosh(\alpha x_2).$$

4. Montrer, en admettant[5] que la mise en oeuvre de la méthode de l'exercice 17, définit une application $(g_0, g_1) \mapsto u$, que cette dernière n'est pas continue lorsqu'on considère la norme C^0 (au départ et à l'arrivée).

[5]on peut le justifier par des calculs et considérations sur les rayons de convergence de g_0 et g_1

19 Système strictement hyperbolique en dimension 1

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose le système différentiel $\partial_t u + A\partial_x u$ strictement hyperbolique (l'inconnue $u(t,x) \in \mathbb{R}^n$ pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$).

1. Qu'est-ce que cela signifie quant à A ?

2. Soit $a \in C^1(\mathbb{R})$. Donner la solution du problème

$$\partial_t u + A\partial_x u = 0 \text{ dans } (0, +\infty) \times \mathbb{R} \tag{54}$$

satisfaisant

$$u(0,x) = a(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

20 Système hyperbolique symétrisable en dimension $d \geq 1$

Soit $n, d \geq 1$. L'entier d est la dimension d'espace, n le nombre d'inconnues dans l'équation

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j u(t,x) = 0, \tag{56}$$

où les matrices $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, pour $s \geq 1$, la condition initiale

$$u(0,x) = a(x), \quad a \in H^s(\mathbb{R}^d)^n, \tag{57}$$

où (rappel)

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^d); \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} < +\infty \right\}, \quad \|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|k|^2)^s |\hat{v}(k)|^2 dk.$$

Le propos de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy (56)-(57) dans H^s sous l'hypothèse que le système est *symétrisable*, à savoir : il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, la matrice SA_j soit symétrique.

1. Montrer que, si $u \in C(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d)^n)$ satisfait (56)-(57), alors
$$\hat{u}(t,k) = e^{-itA(k)} \hat{a}(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}^d, \quad \text{où } A(k) := \sum_{j=1}^{d} k_j A_j. \tag{58}$$

2. Montrer qu'on peut écrire $A(k) = P(k)D(k)P(k)^{-1}$ où $D(k)$ est diagonale réelle et les matrices de passage $P(k)$ ont la propriété de bon conditionnement
$$\sup_{k \in \mathbb{R}^d} \|P(k)\| \|P(k)^{-1}\| < +\infty,$$
pour une norme matricielle $\|\cdot\|$ donnée. On pourra introduire la racine carrée R de S^{-1}.

3. En déduire la borne
$$\sup_{k \in \mathbb{R}^d} \|e^{iA(k)}\| < +\infty. \tag{59}$$

4. Définir une application $S(t) \colon a \mapsto u(t)$ de $H^s(\mathbb{R}^d)^n$ dans lui-mme donnant la solution
$$u \in C(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d)^n)$$
de (56)-(57).

5. On suppose les matrices A_j symétriques. Montrer que $S(t)$ préserve la norme L^2.

Remarque 1 : en introduisant la notion de solution faible (ou solution "au sens des distributions"), on pourrait résoudre (56)-(57) dans H^s pour tout $s \in \mathbb{R}$, en particulier, pour $s = 0$, dans L^2. Une autre manière, un peu plus abstraite, de résoudre dans L^2, est d'étendre par densité l'opérateur $S(t)\colon H^1 \subset L^2 \to H^1 \subset L^2$ en utilisant la dernière question.

Remarque 2 : on peut montrer l'existence d'un cône de dépendance des solutions, Voir *Multi-dimensional Hyperbolic PDE*, Sylvie Benzoni-Gavage, Denis Serre, chapitre 1.3.1

21 Equation de Hamilton-Jacobi et propagation

Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $p \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x, t) \mapsto u(x, t; p) := px - H(p)t$$

   est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t u + H(\partial_x u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times]0, +\infty[. \tag{60}$$

2. On suppose H de classe C^2 et uniformément convexe : $H'' \geq \alpha > 0$ sur $\mathbb{R}$. On introduit la transformée de Fenchel-Legendre

$$L(y) = \sup_{p\in\mathbb{R}} (py - H(p)).$$

   Montrer que L est bien définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $L' = [H']^{-1}$.

3. Soit

$$v(x, t) := \sup_{p\in\mathbb{R}} u(x, t; p).$$

   Exprimer v en fonction de L et montrer que v est elle aussi solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (**??**).

4. Cas $H(p) = \frac{p^r}{r}$, $r \geq 2$. Calculer $v(x, t)$. Quelle est la donnée initiale associée à v ?

22 Fermeture d'un opérateur non borné

Soit H un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $A\colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On suppose que A est *symétrique* :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \tag{61}$$

pour tout $u, v \in D(A)$.

1. Soit
$$\mathrm{Gr}(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\} \subset H \times H$$
le graphe de A. Montrer que la fermeture $\overline{\mathrm{Gr}(A)}$ de $\mathrm{Gr}(A)$ dans $H \times H$ est encore un graphe[6].

2. On définit $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ comme l'opérateur non-borné de graphe $\overline{\mathrm{Gr}(A)}$. Montrer que $\overline{A}$ est fermé, symétrique, et étend[7] l'opérateur A.

3. Montrer que A est dissipatif[8] si, et seulement si, $\overline{A}$ l'est.

[6]Rappel : $E \subset H \times H$ est un graphe si une ligne verticale ne recontre qu'un point de E au plus, à savoir : pour tout $z, z' \in E$, $p_1(z) = p_1(z')$ implique $p_2(z) = p_2(z')$ où p_1 est la projection sur la première composante et p_2 la projection sur la deuxième composante. Dans le cas où E est un espace vectoriel il suffit de montrer que $p_1(z) = 0$ implique $p_2(z) = 0$.

[7]Rappel : $(B, D(B))$ étend $(A, D(A))$ si $D(A) \subset D(B)$ et B est égal à A en restriction à $D(A)$. Autrement dit, $\mathrm{Gr}(A) \subset \mathrm{Gr}(B)$.

[8]Rappel : cela signifie $\mathrm{Re}\langle Au, u \rangle \leq 0$ pour tout $u \in D(A)$

23 Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert

Soit H un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $A\colon D(A)\to H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On munit $H\times H$ du produit hermitien

$$((u,v),(w,z))\mapsto\langle u,w\rangle+\langle v,z\rangle$$

et on définit U, l'opérateur unitaire "rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$" sur $H\times H$ par

$$U(u,v)=(v,-u).$$

1. Soit
$$\mathrm{Gr}(A)=\{(u,Au);u\in D(A)\}\subset H\times H$$
le graphe de A. Soit $\mathrm{Gr}^*=U(\mathrm{Gr}(A)^\perp)$. Montrer que Gr^* est un graphe fermé. Cela définit un opérateur $(A^*,D(A^*))$ qu'on appelle l'adjoint de A.

2. Montrer que $v\in D(A^*)$ si, et seulement si, l'application $T_v\colon u\mapsto\langle Au,v\rangle$ est continue sur $D(A)$ muni de la norme $\|\cdot\|$. Dans ce cas T_v s'étend en une forme linéaire continue sur H. En vertu du Théorème de Riesz, T_v peut tre représenté par un élément de H : quel est ce dernier ?

3. Montrer que A est symétrique si, et seulement si, A^* étend A.

4. On suppose A symétrique. On note $\overline{A}$ la fermeture de A (voir Exercice **??**). Justifier $A^{**}=\overline{A}$ et $A^*=(\overline{A})^*$.

5. On suppose de plus A fermé. Justifier $A=A^{**}$. Montrer l'identité
$$\mathrm{Ker}(A)=(\mathrm{Im}(A^*))^\perp.$$
En déduire les identités suivantes
$$\mathrm{Ker}(A^*)=(\mathrm{Im}(A))^\perp,\quad(\mathrm{Ker}(A))^\perp=\overline{\mathrm{Im}(A^*)},\quad(\mathrm{Ker}(A^*))^\perp=\overline{\mathrm{Im}(A)}.$$

24 Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert (suite)

Définition 1. *Soit $A\colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine dense. On dit que*

- *A est auto-adjoint si $A = A^*$ (noter que cela implique que A est symétrique et fermé),*
- *A est essentiellement auto-adjoint si A est symétrique et sa fermeture $\overline{A}$ est auto-adjoint.*

1. Soit $A\colon D(A) \to H$ un opérateur non borné de domaine dense, symétrique, qui est maximal dissipatif, *i.e.* A est dissipatif:

$$\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A),$$

   et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathrm{Im}(\lambda_0 - A) = H$.

   (a) Montrer que $R(\lambda_0) = (\lambda_0 - A)^{-1}$ est auto-adjoint.

   (b) Montrer que A est auto-adjoint.

2. Soit $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A_0) = H_0^1 \cap H^2(0,1)$ sur $H = L^2(0,1)$. Montrer que A_0 est auto-adjoint (on pourra appliquer la question précédente).

3. Soit maintenant $A_1 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A_1) = C_c^2(0,1)$ sur $H = L^2(0,1)$ (attention à la différence de domaine !).

   (a) Montrer que A_1 est symétrique et que $-A_1$ est dissipatif. Déterminer la fermeture $\overline{A_1}$. Justifier que $D(\overline{A_1})$ est un sous ensemble strict de $D(A_0)$.

   (b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $u_z\colon z \mapsto e^{zx}$ est dans $D(A_1^*)$ et que $A_1^* u_z = -z^2 u_z$. En déduire que A_1^* n'est pas symétrique, que $-A_1^*$ n'est pas dissipatif, puis que A_1 n'est pas essentiellement auto-adjoint.

25 Semi-groupe et inégalité d'interpolation

1. Soit A le générateur d'un semi-groupe de contraction $S(t)$ sur un espace de Banach X. On définit

$$D(A^2) = \{u \in D(A); Au \in D(A).$$

Montrer que si $u \in D(A^2)$, alors

$$\|Au\|^2 \leq 4\|A^2u\|\|u\|. \tag{62}$$

On commencera par justifier l'identité

$$S(t)u - u = tAu + \int_0^t (t-s)S(s)A^2uds. \tag{63}$$

2. Soit X l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}$, muni de la norme du sup. Soit $S(t)$ défini par

$$S(t)f(x) = f(x+t).$$

Montrer que $S(t)$ est un semi-groupe de contraction sur X, déterminer A, puis détailler (**??**) dans ce cas.

26 Ensembles spectraux d'opérateurs non bornés

1. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = L^2(0,1)$, $Au = u'$, $D(A) = H^1(0,1)$. Justifier d'autre part que A est fermé.

2. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = L^2(0,1)$, $Au = u'$,
$$D(A) = \left\{u \in H^1(0,1); u(0) = 0\right\}.$$

3. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = l^2(\mathbb{N})$, $(Au)_n = \mu_n u_n$, $D(A)$ étant l'ensemble des u tels que $Au \in l^2(\mathbb{N})$. Ici (μ_n) est une suite arbitraire de nombres complexes. Justifier d'autre part que A est fermé. Déduire de cet exemple que tout fermé de $\mathbb{C}$ est l'ensemble spectral d'un opérateur non borné.

27 Equation de la chaleur non-linéaire - Exposant critique de Fujita

Soit $d \geq 1$. Soit

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ et soit, pour $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$, $S(t)u = K_t * u$. On admet (propriété des gaussiennes)

$$K_t * K_s = K_{t+s}, \quad t, s \geq 0.$$

Soit X l'espace des fonctions bornées uniformément continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme du sup.

1. Montrer que $(S(t))$ induit un semi-groupe de contraction sur X. Quel est son générateur (opérateur et domaine) ?

2. Soit $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Justifier

$$S(t)\varphi(u) \geq \varphi(S(t)u), \tag{64}$$

   pour tout $u \in X$, pour tout $t \geq 0$.

3. Soit $p \geq 1$. On considère le problème de Cauchy

$$\partial_t u - \Delta u = |u|^{p-1}u \text{ dans } \mathbb{R}^d \times (0,T) \tag{65a}$$
$$u = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \tag{65b}$$

   pour $u_0 \in X$. Justifier l'existence-unicité d'une solution intégrale maximale $u \in C([0, T^*(u_0)[; X)$.

4. On suppose que $u_0 \in X$ est une fonction positive : $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il en est de mme de u. On pourra utiliser (**??**) avec $\varphi(u) = u^-$.

5. On suppose toujours $u_0 \in X$ positive. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$u(t) \geq \frac{t^{1+p+\cdots+p^{n-1}}}{(1+p)^{p^{n-2}}(1+p+p^2)^{p^{n-3}}\cdots(1+p+\cdots+p^{n-1})} [S(t)u_0]^{p^n}, \tag{66}$$

   pour $0 \leq t < T^*(u_0)$. On pourra utiliser (**??**) avec $\varphi(u) = |u|^p$.

6. En déduire
$$t^{\frac{1}{p-1}} S(t)u_0 \leq C(p), \tag{67}$$
pour $0 \leq t < T^*(u_0)$, où $C(p)$ est une constante finie.

7. Justifier $\lim_{t\to+\infty} t^{d/2} S(t)u_0(x) = (4\pi)^{-d/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

8. On définit l'exposant critique de Fujita par
$$p_F = 1 + \frac{2}{d}.$$
Montrer que, si $1 < p < p_F$, alors $T^*(u_0) < +\infty$ pour tout $u_0 \in X \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ positive non identiquement nulle.