

Exercice. Soit E une courbe elliptique sur un corps K , et m, n deux entiers qui ne sont pas divisibles par $\text{car}(K)$. Soient $S \in E[mn]$ et $T \in E[n]$. Montrer que

$$e_{mn}(S, T) = e_n(mS, T).$$

Solution. Soit D_S un diviseur de degré 0 et de somme S , et D_T un diviseur de degré 0 et de somme T .

Soient f_S et f_T deux fonctions rationnelles sur E avec $(f_S) = mnD_S$ et $(f_T) = mnD_T$. Alors d'après le cours,

$$e_{mn}(S, T) = \frac{f_S(D_T)}{f_T(D_S)}.$$

Soit g_T une fonction rationnelle sur E avec $(g_T) = nD_T$. On note que mD_S est un diviseur de degré 0 et de somme mS , et $(f_S) = n(mD_S)$. D'après le cours,

$$e_n(mS, T) = \frac{f_S(D_T)}{g_T(mD_S)}.$$

Or,

$$(f_T) = mnD_T = m(g_T) = (g_T^m),$$

et donc

$$f_T(D_S) = g_T^m(D_S) = g_T(mD_S)$$

puisque $f(D + D') = f(D)f(D')$ pour une fonction rationnelle f sur E et deux diviseurs D et D' .

Ceci montre le resultat.