Université Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de Mathématiques 3[e] année
Année 2013-2014

Rappels sur les ensembles

Propriétés générales. On fixe un ensemble X. On désigne par A, B des parties de X, et par $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ des familles de parties de X indexées par un ensemble *quelconque* d'indices I. On désigne par A^c le complémentaire dans X de la partie A.

Nous avons les proprieétés suivantes.

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de X, alors $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \bigcup_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup_{n\geqslant n_0} A_n$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties de X, alors $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \bigcap_{n\geqslant 0} A_n = \bigcap_{n\geqslant n_0} A_n$.
3. $A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$ et $A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$.
4. $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
5. $A \setminus (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i)$ et $(\bigcup_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
6. $A \setminus (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i)$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i \setminus B)$.

Image directe, image réciproque. On se donne deux ensembles X et Y, et une application $f : X \to Y$. Si $A \subset X$, on définit $f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\}$. Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) = \{x \in X \text{ t. q. } f(x) \in B\}$.

Nous avons les propriétés suivantes de f^{-1}.

1. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
2. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
3. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
4. Si de plus g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

En général, les propriétés de f sont moins bonnes. Nous avons

5. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
6. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. En général, l'inclusion est stricte.
7. En général, il n'y a pas de relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $f(A)^c$.

Caractérisation de l'injectivité. Si $f : X \to Y$, alors nous avons l'équivalence

1. f est injective.
2. $\forall\, A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$.
3. $\forall\, x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
4. Il existe $g : Y \to X$ t. q. $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ (g est un *inverse à gauche* de f).

Caractérisation de la surjectivité. Si $f : X \to Y$, alors nous avons l'équivalence

1. f est surjective.
2. $\forall\, B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. $\forall\, y \in Y,\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.
4. Il existe $g : Y \to X$ t. q. $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ (g est un *inverse à droite* de f).

Caractérisation des fonctions bijectives. f est bijective ssi f a un inverse à gauche et un inverse à droite, et dans ce cas les deux inverses coïncident.

Les fonctions de Y vers X.

1. Si X et Y sont des ensembles, alors X^Y est une notation pour l'ensemble des fonctions de Y vers X.
2. Dans le cas particulier où $Y = \mathbb{N}$, nous obtenons $X^{\mathbb{N}}$, qui est l'ensemble des suites à valeurs dans X.
3. Par analogie avec les suites, un élément f de X^Y peut être aussi noté $(x_y)_{y \in Y}$, avec $x_y := f(y)$.
4. Si $Y = \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble X^Y est noté X^n, et un élément de X^n est noté $(x_1, \ldots, x_n)$.