Dénombrement : bases théoriques

Mesure et Intégration 2013-2014

Université Lyon 1

17 septembre 2013

Définition

Un ensemble A est :

- *dénombrable s'il existe une bijection* $\varphi : \mathbb{N} \to A$
- *au plus dénombrable (a. p. d.) s'il est fini ou dénombrable*
- *non dénombrable s'il n'est ni fini, ni dénombrable*
- *Rq : il y a toute une zoologie des ensembles non dénombrables*

Exemples

* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables
* $]0, 1]$ n'est pas dénombrable

Boîte à outils (I)

Proposition

* Deux ensembles en bijection sont de même nature (finis, dénombrables, non dénombrables)
* Une partie d'un ensemble a. p. d. est un ensemble a. p. d.
* Un ensemble qui contient une partie non dénombrable est lui même non dénombrable

Boîte à outils (II)

Proposition

- Une union a. p. d. d'ensembles a. p. d. est un ensemble a. p. d.
- Un produit cartésien fini d'ensembles a. p. d. est un ensemble a. p. d.
- S'il existe $f : A \to B$ injective, avec B dénombrable, alors A est a. p. d.
- Un ensemble est dénombrable ssi il est a. p. d. et :
  1. soit il existe une fonction injective $\psi : \mathbb{N} \to A$
  2. soit il existe une fonction injective $\eta : B \to A$, avec B dénombrable
  3. soit A est infini

Boîte à outils (III)

Théorème de Cantor-Bernstein

Soient A, B deux ensembles. S'il existe une fonction injective $f : A \to B$ et une fonction injective $g : B \to A$, alors il existe une fonction bijective $\varphi : A \to B$

Corollaire

S'il existe une fonction injective $f : A \to B$ et une fonction injective $g : C \to A$, avec B et C dénombrables, alors A est dénombrable