# Mesures. Fonctions mesurables. Rappels

## Mesure et Intégration 2013-2014

Université Lyon 1

1er octobre 2013

# Mesures

* On se donne $(X, \mathscr{T})$ mesurable. Mesure : $\mu : \mathscr{T} \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\sqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ ($\sigma$-additivité)
* Propriétés basiques :
  (i) Monotonie $[A, B \in \mathscr{T}, A \subset B] \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
  (ii) Additivité finie $\mu(\sqcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$
  (iii) Sous additivité a. p. d.
  $[A_n \in \mathscr{T}, \forall\, n] \implies \mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$
* Mesure $\sigma$-finie : $\exists\, A_n \in \mathscr{T}$, $n \in \mathbb{N}$, t. q. $\mu(A_n) < \infty$ et $X = \cup_n A_n$

# Mesures boréliennes

* Mesure borélienne : $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0, \infty]$, avec $(X, d)$ métrique, $\mathscr{B}(X)$ la tribu borélienne
* Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ : la (complétée de la) seule mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu(\Pi_{j=1}^n ]a_j, b_j[) = \Pi_{j=1}^n (b_j - a_j)$
* Tribu, mesure complétée :
  $\mathscr{N} := \{A \subset X\,;\, \exists\, B \in \mathscr{T}$ t. q. $A \subset B$ et $\mu(B) = 0\}$.
  $\overline{\mathscr{T}} = \{A \setminus B \cup C\,;\, A \in \mathscr{T},\ B,\ C \in \mathscr{N}\}$ (tribu complétée).
  $\overline{\mu} : \overline{\mathscr{T}} \to [0, \infty]$, $\overline{\mu}(A \setminus B \cup C) = \mu(A)$ (mesure complétée)

# Engendrement

On se donne une application $\sigma$-additive $\nu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$. Si

- $\mathscr{C}$ clan
- $\exists\, C_n \in \mathscr{C}$ t. q. $\nu(C_n) < \infty$ et $X = \cup C_n$

alors $\nu$ admet une unique extension mesure $\mu : \sigma(\mathscr{C}) \to \mathbb{R}$

Cas particulier : si $\mathscr{C}$ est le clan des unions finies $\sqcup I_j$ d'intervalles sur $\mathbb{R}$ et $\nu(\sqcup I_j) = \sum \ell(I_j)$, alors l'extension $\mu$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

# Fonctions mesurables

* $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ telle que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \in \mathscr{S}$
* Le plus souvent $Y = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$
* Critère : si $\mathscr{S}$ est engendrée par $\mathscr{C}$, alors $f$ mesurable $\iff f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \in \mathscr{C}$
* Cas particuliers : $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable $\iff f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B$ de la forme
  (i) $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$ (ou $]a, \infty[$)
  (ii) $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$)
  (iii) ouvert

# Fonctions étagées

- $f : X \to \mathbb{R}$ de la forme $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$, avec $N = N(f)$ et $A_j \in \mathscr{T}, \forall j$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable $\iff f = \lim_n f_n$, avec $f_n$ étagées (limite simple)

# Opérations avec des fonctions mesurables

Si $f$, $g$, $f_n$ etc. sont mesurables, alors les fonctions suivantes sont mesurables

- $Cf$ ($C \in \mathbb{R}$), $f + g$, $fg$, $f/g$ (si $g \neq 0$), $\max(f, g)$, $\min(f, g)$. Plus généralement, $\Phi(f, g)$, avec $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue (ou borélienne)
- De même si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (sous réserve d'opérations licites)
- $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\lim f_n$ (si elle existe), $\liminf f_n$, $\limsup f_n$