Tribus en bref

Mesure et Intégration 2013-2014

Université Lyon 1

24 septembre 2013

Définition

$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une tribu si

* $\emptyset \in \mathscr{A}$
* $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$
* $[A_n \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{N}] \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

Propriétés de base

* $X \in \mathscr{A}$
* Si A, B, $\ldots$, sont dans $\mathscr{A}$, alors : $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$
* Une intersection de tribus est une tribu
* D'où l'existence de la tribu engendrée : si $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$, alors il existe une plus petite tribu, $\sigma(\mathscr{C})$, engendrée par $\mathscr{C}$
* Si $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$, alors $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$
* $\sigma(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(\mathscr{C})$

Tribu borélienne

* Si (X, d) est métrique, alors la tribu borélienne $\mathscr{B}(X)$ est la tribu engendrée par les ouverts de X
* $\mathscr{B}(X)$ contient et est engendrée par les fermés
* Dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée : par les intervalles ouverts, ou par les intervalles de la forme $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$
* Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par les pavés $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[$