Université Lyon 1 — Licence de Mathématiques 3e année
Mesure et intégration — Année 2013-2014

Changements de variables

Feuille 9

Notations

1. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ est notée λ_n. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ est notée λ.
2. Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ (la fonction Gamma d'Euler).
3. Une application $H : A \to B$, avec $A, B \subset \mathbb{R}^n$, sera souvent notée $H : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (u_1, \dots, u_n)$, avec $(u_1, \dots, u_n) := H(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 1

1. Montrer que $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0$, l'application $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ-intégrable sur $[0,1]$. On pose pour $x > 0$ et $y > 0$: $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ (c'est la fonction Bêta d'Euler).
2. Soient $x > 0, y > 0$ et $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}\,dsdt$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbb{R}^2$: $u = t$ et $v = t + s$.
3. En calculant I d'une autre manière, établir pour $x, y > 0$ l'identité

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1}$$

Exercice 2 Pour $n \geqslant 1$, soit $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + \cdots + x_n < 1\}$. Soit $S_n = \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1}. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 3

1. Soit $H : (u,v) \mapsto (s,t)$ avec $s = uv$ et $t = u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,\infty[\times]0,1[$ sur l'ouvert $V = (\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Soient $x > 0, y > 0$ et $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}\,dsdt$.

   En utilisant le changement de variables H, calculer I et retrouver l'identité (1).

Exercice 4 Soient $0 \leqslant a < b$. On pose

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

1. Montrer que D est un borélien.
2. A l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = xy \end{cases}$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y)$ en fonction de a et b.

Exercice 5

Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$U = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3\,;\, u > 0, v > 0, w > 0 \text{ et } uv < 1, uw < 1, vw < 1\}.$$

1. Montrer que U est borélien.
2. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_U uvw \, d\lambda_3(u,v,w).$$

   On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant :

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w) = (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application borélienne. On fixe $a,b,c > 0$ et on note

$$I_{a,b,c} = \int_{(\mathbb{R}_+)^3} x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x+y+z) \, dxdydz.$$

1. Soit $H : (x,y,z) \mapsto (u,v,w)$, où $u = x+y+z$, $v = \dfrac{x}{x+y}$ et $w = \dfrac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.
2. En utilisant H et la formule (1), en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^\infty f(u) \, u^{a+b+c-1} \, du.$$

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit l'intégrale

$$J = \int_{(\mathbb{R}_+)^3} \frac{dxdydz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$

   A quelle condition sur α, β, γ, l'intégrale J est-elle finie ?
4. Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2+y^2+z^2 < 1\}$. En utilisant la question 2, calculer

$$L = \int_B |x|^{a-1} |y|^{b-1} |z|^{c-1} \, dxdydz.$$

   Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice 7 Partie 1

Pour $a > 0$ et $x \geqslant 0$, on pose $H_a(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(at^2 + x/t^2)} \, dt$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

1. Montrer que la fonction $H_a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
2. Calculer $H_a(0)$.
3. Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, \infty[$.
4. Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{\alpha}{s}$, avec α convenablement choisi).
5. En déduire que $H_a(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}}$, $a > 0$, $x \geqslant 0$.

Partie 2

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$J(\alpha) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2 + x/y^2)} x^{\alpha - 1/2} \, d\lambda_2(x,y).$$

1. En utilisant la partie 1, montrer que $J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)$.
2. En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x/y^2 \end{cases}$, que l'on justifiera, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

3. En déduire la formule $\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice 8 On rappelle que la fonction « cosinus hyperbolique » est définie par $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. On se donne les trois intégrales

$$A = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad B = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\lambda_2(s,t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad C = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\lambda_2(u,v)}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}.$$

1a. Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

1b. En faisant le changement de variables $s = u - v, t = u + v$, prouver que $B = C$ et donner la valeur de A.

2. On considère la fonction $H : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} t)\, dt.$$

2a. Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, \infty[$. Déterminer les limites de H lorsque $\to 0$ et lorsque $x \to \infty$.

2b. Vérifier que $\int_0^\infty H(x)\, dx = \frac{\pi}{2}$.

2c. En utilisant l'intégrale A de la partie 1, montrer que $\int_0^\infty H(x)^2 dx = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 9 On pose $J = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{dxdy}{1 - xy}$.

1. Montrer que $J = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. (On pourra utiliser le développement en série entière de $\ln(1-t)$.)
2. Effectuer le changement de variables $x = u - v$ et $y = u + v$ et en déduire que

$$J = \int_Q \frac{2dudv}{1 - u^2 + v^2},$$

où Q est un quadrilatère du plan que l'on déterminera.

3. Effectuer le changement de variable $u = \cos t$ et en déduire que $J = \pi^2/6$.
(On rappelle que $\frac{1 - \cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$ et que $\arctan(z) + \arctan(1/z) = \pi/2$.)