Dénombrement. Sup. Mesurabilité

Feuille 1

Dénombrement

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. $\mathbb{R}$ est dénombrable.
4. $\mathbb{C}$ est dénombrable.
5. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

On pourra s'appuyer sur la non dénombrabilité de $]0,1]$.

Exercice 2 Un nombre réel x est *algébrique* s'il existe un polynôme non nul P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant.*

1. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
2. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice 3 Nous admettons le résultat suivant, qui sera démontré en topologie : tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ s'écrit $U = \cup_{i \in I} I_i$, avec les I_i intervalles ouverts non vides et deux à deux disjoints. Montrer que I est au plus dénombrable. Ou encore : tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Fonctions caractéristiques

Exercice 4 Soit X un ensemble. Pour une partie A de X, on définit sa *fonction indicatrice* (ou *fonction caractéristique*, ou *indicatrice*) $\chi_A : X \to \{0,1\}$ par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

1. Calculer $\chi_\emptyset$ et χ_X. Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.
2. Calculer en fonction de χ_A et χ_B les fonctions suivantes : $\chi_{A^c}, \chi_{A\cap B}, \chi_{A\cup B}$ (dans le cas général et dans le cas particulier où $A \cap B = \emptyset$), $\chi_{A\triangle B}, \chi_{f^{-1}(A)}$.
3. L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathscr{P}(X)$ dans $\{0,1\}^X$?
4. Soit (A_n) une suite de parties de X et soit $A = \bigcup_n A_n$.
   (i) Montrer que si la suite (A_n) est croissante (c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$), alors la suite (χ_{A_n}) est croissante et converge simplement vers χ_A.
   (ii) Si les A_n sont deux à deux disjoints, montrer que $\chi_A = \sum_{n=0}^\infty \chi_{A_n}$.

lim sup

Exercice 5 **Préambule.** En intégration, il est utile d'étendre la notion de borne supérieure à des ensembles non majorés. Il est utile aussi d'associer à une suite les quantités $\limsup$ et $\liminf$, qui ont des propriétés similaires à la limite, et l'avantage d'exister pour toute suite (contrairement à la limite).

Définitions. Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble non vide, nous définissons $\sup A$ comme le plus petit

élément de l'ensemble $\{M \in \overline{\mathbb{R}}\,;\, M$ majorant de $A\}$.
Si $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$, alors par définition

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k.$$

1. Proposer la définition de $\inf A$.
2. Proposer la définition de $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. Montrer que toute partie non vide A de $\overline{\mathbb{R}}$ admet (exactement) un sup et un inf.
4. Si $A \subset \mathbb{R}$, comparer $\sup A$ au $\sup A$ « d'avant ». Proposer une formule compacte pour $\sup A$ en fonction du $\sup A$ « d'avant ».
5. Montrer que toute suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ admet (des uniques) lim sup et lim inf.
6. Calculer lim sup et lim inf pour la suite donnée par $x_n := (-1)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
7. Pour toute suite (x_n), montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
   (b) Si $x_n \to l$, alors $l = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
   (c) Réciproquement, si $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = l$, alors $x_n \to l$.

Mesurabilité

Exercice 6 Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R}\,;\, A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.
4. Question plus difficile : même conclusion si on remplace $\mathbb{R}$ par tout ensemble non dénombrable.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f est borélienne.
2. Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est au plus dénombrable.
3. Plus généralement, si $f : I \to \mathbb{R}$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle) est continue en dehors d'un ensemble au plus dénombrable, alors f est borélienne.

Exercice 8 Soit $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ une partition de l'espace métrique X, avec :

(i) I au plus dénombrable.
(ii) A_i borélien, $\forall\, i \in I$.

Pour chaque i, soit $f_i : A_i \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On définit la fonction « à accolade » $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$.

1. Montrer que f est borélienne.
2. Retrouver comme cas particuliers les conclusions de l'exercice précédent.
3. Enoncer et prouver un résultat analogue si X est mesurable.
4. Montrer que l'hypothèse « I au plus dénombrable » est essentielle.

Exercice 9

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est borélienne.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) f est dérivable en x et $f'(x) = l$.
   (ii) Nous avons l'égalité

$$l = \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \,;\, h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\} = \lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \,;\, h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\}.$$

3. En déduire que, si f est continue, alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} f'(x), & \text{si } f \text{ est dérivable en } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, est borélienne.
4. Est-il vrai que $g = 0 \implies f$ constante ?

Compléments. Monotonie et intégrale de Riemann

Exercice 10 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est Riemann intégrable.

Exercice 11 Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *à variation bornée* si

$$V_T(f) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \,;\, n \in \mathbb{N}^*,\ a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \right\} < \infty.$$

Le nombre $V_T(f)$ (noté aussi $V_T(f)([a, b])$) est la *variation totale de f sur* $[a, b]$.

1. Montrer que les fonctions monotones et les fonctions de classe C^1 sont à variation bornée.
2. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, est continue, mais n'est pas à variation bornée.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée. Etudier la monotonie des fonction $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := V_T(f)([a, x])$, $h := g - f$.
4. En déduire le *théorème de Jordan* : une fonction est à variation bornée ssi elle est la différence de deux fonctions croissantes.
5. Montrer qu'une fonction à variation bornée est Riemann intégrable.

Exercice 12 Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec f continue et g décroissante. Soit F une primitive de f, choisie telle que $F \ge 0$. Nous nous proposons d'établir une formule (faible) d'intégration par parties.

1. Si, de plus, nous avons $g \in C^1$, montrer (en intégrant par parties) que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \ge [F(t)g(t)]_a^b\,. \tag{1}$$

2. Sous les hypothèsse initiales, montrer que fg est Riemann intégrable.
3. Montrer que, sous les hypothèses initiales, (1) reste vraie.