Université Lyon 1 | Licence de Mathématiques 3e année
Mesure et intégration | Année 2013-2014

Quelques propriétés de l'espace $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

Devoir maison à rendre le 17 décembre 2013

Cadre, notations, définitions, rappels

1. Nous munissons $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ.
2. L'intégrale de f par rapport à λ est notée simplement $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$.
3. La mesure de Lebesgue λ est *régulière* : si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et si $\lambda(B) < \infty$, alors

   pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K \subset B \subset \Omega \subset \mathbb{R}$, avec K compact, Ω ouvert, et $\lambda(\Omega \setminus K) < \varepsilon$. (1)

4. Rappelons le fait suivant : si $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}$, avec K compact et Ω ouvert, alors il existe $\delta > 0$ tel que
$$[x \in K,\ y \in \mathbb{R}, |x-y| \le \delta] \implies y \in \Omega. \tag{2}$$
5. Si $K \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, nous posons
$$K_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}\,;\, \exists\, x \in K \text{ tel que } |y-x| \le \varepsilon\}. \tag{3}$$
   La propriété précédente s'énonce donc de manière équivalente ainsi : si $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}$, avec K compact et Ω ouvert, alors il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $K_\delta \subset \Omega$.
6. Nous posons
$$\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}\,;\, f \text{ borélienne intégrable par rapport à } \lambda\}.$$
7. Nous munissons $\mathscr{L}^1$ de la semi-norme[1] $\|f\| := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$.
8. Rappelons le théorème suivant (attribué à Weierstrass) : si $f_j, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont telles que :
$$f_j \in C^1,\ f_j \to f \text{ et } f_j' \to g \text{ (les deux convergences étant uniformes sur les compacts)},$$
   alors $f \in C^1$, et $f' = g$.
9. Nous notons
$$C_c^\infty = C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R})\,;\, \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = 0,\ \forall\, x \notin [a,b]\}.$$
10. Nous définissons un *noyau régularisant* comme une fonction φ avec les propriétés suivantes :
    (a) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(x) = 0$, $\forall\, x \notin [-1,1]$.
    (b) $\varphi(x) \ge 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
    (c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$.

1. Une semi-norme est une application $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, avec X espace vectoriel réel (ou complexe) vérifiant toutes les propriétés d'une norme, sauf éventuellement la propriété $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

Partie I. Existence d'un noyau régularisant

Nous considérons une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset]0,\infty[$ telle que $A := \sum_{n\geq 0} a_n < \infty$.

Posons $u_0(x) := \begin{cases} 1/a_0, & \text{si } 0 \leq x \leq a_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Par récurrence sur n, nous définissons

$$u_n(x) := \frac{1}{a_n} \int_{x-a_n}^{x} u_{n-1}(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
3. Montrer que $u_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $\forall\, n \geq 1$.
4. Si $k \in \mathbb{N}$, montrer que la suite $\left(u_n^{(k)}\right)_{n\geq k+1}$ est de Cauchy pour la norme uniforme. [Indication : majorer $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| u_{n+1}^{(k)}(x) - u_n^{(k)}(x) \right|$.]
5. En déduire qu'il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n^{(k)} \to u^{(k)}$ uniformément quand $n \to \infty$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que $u(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
7. Montrer que $u_n(x) = 0$ si $x \notin [0, a_0 + a_1 + \cdots + a_n]$.
8. En déduire que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
9. Calculer, par récurrence, $\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\, dx$.
10. Combien vaut $\int_{\mathbb{R}} u(x)\, dx$?
11. En choisissant $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ convenables, montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \lambda u\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, est un noyau régularisant.

Partie II. Densité des fonctions étagées « spéciales »

Rappelons que toute fonctions borélienne $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est limite simple de fonctions de la forme

$$g = \sum_{\text{finie}} a_j \chi_{A_j},\ \text{avec } a_j \in \mathbb{R} \text{ et } A_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ \forall\, j. \tag{4}$$

1. Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe g étagée telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. [Indication : pour $m \in \mathbb{N}^*$, considérer

$$g_m := \sum_{-m^2 \leq k \leq m^2} \frac{k}{m} \chi_{A_{m,k}},$$

où

$$A_{m,k} := \{x \in \mathbb{R}\,;\, k/m \leq f(x) < (k+1)/m\},\ \text{si } k \geq 0,$$

respectivement

$$A_{m,k} := \{x \in \mathbb{R}\,;\, (k-1)/m \leq f(x) < k/m\},\ \text{si } k < 0.$$

Montrer que $\|f - g_m\| \to 0$ quand $m \to \infty$.]

2. Montrer que, dans la question précédente, on peut choisir g de la forme (4) telle que, en plus de $\|f-g\|<\varepsilon$, on ait $\lambda(A_j)<\infty$, $\forall\, j$. [Indication : remplacer la somme sur $k\in[\![-m^2,m^2]\!]$ par la somme sur $k\in[\![-m^2,m^2]\!]\setminus\{0\}$.]

Partie III. Régularisation

Soit φ un noyau régularisant. Si $\varepsilon>0$, posons $\varphi_\varepsilon(x):=\dfrac{1}{\varepsilon}\varphi(x/\varepsilon)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que φ_ε a les propriétés suivantes.
   (a) $\varphi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$.
   (b) $\varphi_\varepsilon(x)=0$ si $x\notin[-\varepsilon,\varepsilon]$.
   (c) $\varphi_\varepsilon(x)\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
   (d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(x)\,dx=1$.

   Soit $f\in\mathscr{L}^1$. Posons
$$f^\varepsilon(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy,\ \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$
2. Montrer que $f^\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$ et que
$$(f^\varepsilon)^{(j)}(x)=\frac{1}{\varepsilon^{j+1}}\int_{\mathbb{R}}f(y)\,\varphi^{(j)}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy,\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, j\in\mathbb{N}^*.$$

Partie IV. Densité de C_c^∞ dans $\mathscr{L}^1$

Soit $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(B)<\infty$. Soient K, Ω et δ comme dans (1)-(2). Pour $\varepsilon<\delta/2$, soit K_ε comme dans (3). Notons $\zeta:=(\chi_{K_\varepsilon})^\varepsilon$, avec f^ε donnée par (5).

1. Montrer que $\zeta(x)=1$, $\forall\, x\in K$.
2. Montrer que $\zeta(x)=0$, $\forall\, x\notin\Omega$.
3. Montrer que $0\leq\zeta(x)\leq 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
4. En déduire que $\|\chi_B-\zeta\|<\varepsilon$.
5. En déduire que C_c^∞ est dense dans $\mathscr{L}^1$. [Indication : combiner la question précédente avec la question **II.** 2.]

Partie V. Une application : le lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, nous définissons la transformée de Fourier $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ par la formule
$$\widehat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}e^{-\imath x\,\xi}\,f(x)\,dx,\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}.$$
1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie.
2. Montrer que $\widehat{f}$ est continue.
3. Montrer que
$$|\widehat{f}(\xi)-\widehat{g}(\xi)|\leq\|f-g\|,\ \forall\, f,g\in\mathscr{L}^1,\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}.$$

4. Soit $f \in C_c^\infty$. Montrer que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \tag{6}$$

[Indication : intégrer par parties.]

5. Montrer que (6) reste vraie pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^1$. [Indication : combiner la question précédente avec les questions **IV.** 5. et **V.** 3.]