Licence de Mathématiques 2013-2014

Mesure et Intégration

Corrigé du devoir maison sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Partie I

1 u_0 est une fonction en escalier, donc Riemann-intégrable sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Il s'ensuit que, dans la définition de u_1, l'intégrale définie est une intégrale de Lebesgue. D'où :

$$u_1(x) = \frac{1}{a_1}\int_{x-a_1}^{x} u_0(y)\,dy = \frac{1}{a_1}\int_{[x-a_1,x]} u_0 = \frac{1}{a_0 a_1}\int_{[x-a_1,x]} \chi_{[0,a_0]}$$

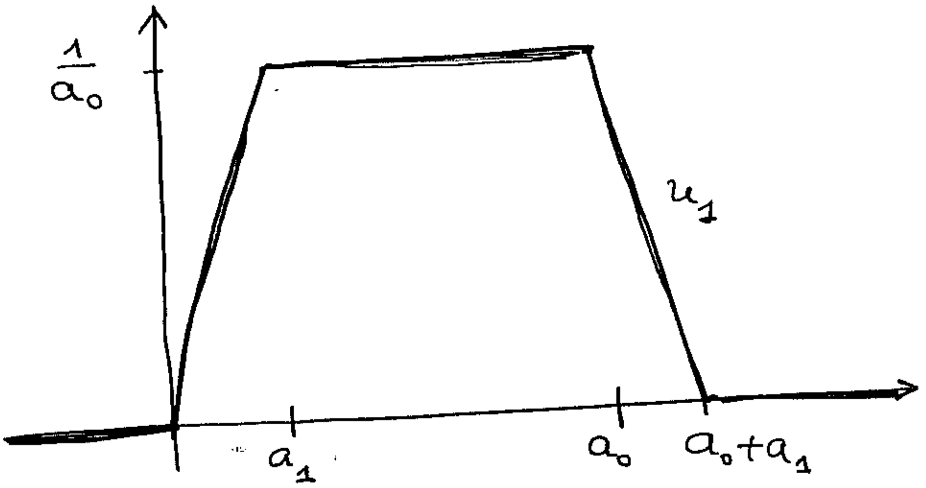
$$= \frac{1}{a_0 a_1}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,a_0]}\chi_{[x-a_1,x]} = \frac{1}{a_0 a_1}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,a_0]\cap[x-a_1,x]}$$

$$= \frac{1}{a_0 a_1}\,\chi_{[0,a_0]\cap[x-a_1,x]}$$

En examinant l'intersection des intervalles $[0,a_0]$ et $[x-a_1,x]$ selon les cas $(x<0, \text{etc.})$ nous obtenons

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a_0 a_1}, & \text{si } 0 < x \leq \min\{a_0,a_1\} \\ \dfrac{1}{a_0}, & \text{si } a_1 < x \leq a_0 \quad (*) \\ \dfrac{a_0+a_1-x}{a_0 a_1}, & \text{si } \max\{a_0,a_1\} < x \leq a_0+a_1 \\ \dfrac{1}{a_1}, & \text{si } a_0 < x \leq a_1 \quad (**) \\ 0, & \text{si } x > a_0+a_1. \end{cases}$$

Notons que les cas $(*)$ et $(**)$ n'arrivent pas simultanément.



Graphe de u_1 si $a_1 < a_0$.

Les rôles de a_0 et a_1 sont inversés si $a_1 > a_0$. Le plateau $u_1 \equiv \frac{1}{a_0}$ est réduit à un point si $a_1 = a_0$.

[2] Considérons par exemple le cas où $a_1 \leq a_0$. Alors u_1 est continue par morceaux, et continue tout court (en examinant les limites latérales en $x = 0, a_1, a_0, a_0+a_1$).

On obtient alors que $u_2 \in C^1$, $u_3 \in C^2$. En particulier, les intégrales de Riemann définissant les u_n existent (et sont finies).

[3] Voir la question précédente.

[4] Pour deviner la stratégie à suivre, essayons de suivre l'indication si $k=0$ et $n \geq 2$. Nous avons :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{x-a_{n+1}}^{x} u_n(t)\,dt - u_n(x) =$$

(formule de la moyenne)

$= u_n(\xi) - u_n(x)$ (pour un $\xi \in [x-a_n, x]$ convenable).
Le théorème des accroissements finis donne alors

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq a_{n+1} \sup_{z \in \mathbb{R}} |u_n'(z)|. \qquad (1)$$

Ceci suggère de trouver une borne uniforme (en n et z) pour $|u_n'(z)|$ (et plus généralement pour $|u_n^{(j)}(z)|$).

<u>Etape 1.</u> Il existe $C_j < \infty$ tq $|u_{j+1}^{(j)}(z)| \leq C_j$, $\forall j \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

<u>Preuve.</u> De la question $\boxed{7}$ qui suit, u_{j+1} s'annule en dehors de l'intervalle $[0, a_0 + \dots + a_{j+1}]$. Il s'ensuit que $u_{j+1}^{(j)}$ est continue sur $[0, a_0 + \dots + a_{j+1}]$ et s'annule en dehors de cet intervalle. $u_{j+1}^{(j)}$ est donc une fonction continue "à support compact", donc bornée.

<u>Etape 2.</u> Nous avons $|u_n^{(j)}(z)| \leq C_j$, $\forall j \geq 0$, $\forall n \geq j+1$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

<u>Preuve.</u> Par récurrence sur n, le cas $n = j+1$ étant réglé.
Nous avons si $j \geq 1$ (le cas $j=0$ est laissé en exercice)

$$|u_n^{(j)}(z)| = \left| \frac{d^j}{dz^j} \frac{1}{a_n} \int_{z-a_n}^{z} u_{n-1}(y)\,dy \right| = \Big| \frac{1}{a_n} \Big[u_{n-1}^{(j-1)}(z) - u_{n-1}^{(j-1)}(z-a_n) \Big] \Big| = \left| \frac{1}{a_n} \int_{z-a_n}^{z} u_{n-1}^{(j)}(y)\,dy \right| \leq \max_{t \in [z-a_n, z]} |u_{n-1}^{(j)}(t)| \leq C_j$$

(si $n \geq j+2$ et on suppose la propriété à montrer vraie pour $n-1$).

Etape 3. Nous avons

$$|u_{n+1}^{(j)} - u_n^{(j)}| \leqslant a_{n+1} C_{j+1} \quad, \forall j \geq 0, \forall n \geq j+2. \qquad (2)$$

Preuve. Considérons à nouveau le cas où $j \geq 1$. Alors

$$|u_{n+1}^{(j)}(x) - u_n^{(j)}(x)| = \left| \frac{1}{a_{n+1}} \int_{x-a_{n+1}}^{x} u_n^{(j)}(y)\,dy - u_n^{(j)}(x) \right|$$

$$\underset{\text{(avec } \xi \text{ convenable)}}{=} |u_n^{(j)}(\xi) - u_n^{(j)}(x)| \underset{\substack{\text{(théorème des} \\ \text{accroissements finis)}}}{\leqslant} |\xi - x| \sup_{z \in \mathbb{R}} |u_n^{(j+1)}(z)|$$

$$\leqslant a_{n+1} C_{j+1}.$$

Etape 4. Conclusion.

De (2) et l'hypothèse $\sum_{n \geq 0} a_n < \infty$, nous obtenons que la série $\sum_{n \geq j+2} (u_{n+1}^{(j)} - u_n^{(j)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, la suite des sommes partielles, $(u_n^{(j)} - u_{j+2}^{(j)})_{n \geq j+2}$ converge uniformément. Comme, par ailleurs, $u_{j+2}^{(j)}$ est continue et bornée, il s'ensuit que la suite $(u_n^{(j)})_{n \geq j+1}$ de fonctions continues et bornées converge uniformément vers une fonction continue et bornée, que nous notons v_j $(j \geq 0)$.

$\boxed{5}$ Rappelons le théorème suivant, attribué à Weierstrass: si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et $(f_n) \subset C^1(I)$ sont des fonctions tq $f_n \xrightarrow{u} f$ et $f_n' \xrightarrow{u} g$, alors

$f \in C^1$ et $f' = g$.
(Dans ce qui précède, on peut remplacer $\xrightarrow{u}$ par $\xrightarrow{UC}$.)

En appliquant de manière répétée ce résultat, nous obtenons par récurrence sur k : si nous posons $u := v_0$ (avec v_j comme dans $\boxed{4}$), alors $u \in C^k$ et $u^{(k)} = v_k$. $\forall k$.
En particulier, $u_n^{(k)} \xrightarrow{u} u^{(k)}$ qd $n \to \infty$,

$\boxed{6}$ Par récurrence sur n, en utilisant la formule de u_n nous avons $u_n \geq 0$, $\forall n$. D'où (passage à la limite simple) $u \geq 0$.

$\boxed{7}$ Par récurrence sur n, le cas $n=0$ étant clair.
Passage de n à $n+1$: si $x < 0$, alors $u_n(y) = 0$, $\forall y \in [x - a_{n+1}, x]$, d'où $u_{n+1}(x) = 0$.
De même si $x > a_0 + \dots + a_n + a_{n+1}$.

$\boxed{8}$ De $\boxed{7}$, nous avons $u_n(x) = 0$, $\forall x \notin [0, A]$.
Par passage à la limite (simple), $u(x) = 0, \forall x \notin [0, A]$
De ceci et de $\boxed{5}$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{9}$ La réponse est 1, le cas $n=0$ étant clair. Passage de n à $n+1$.
Posons $f(x,y) = \dfrac{1}{a_{n+1}} u_n(y) \chi_A(x,y)$, où
$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x - a_{n+1} \leq y \leq x\}$.
Alors (détailler les arguments !)

- u_n est borélienne comme fonction de y, donc de (x,y)
- A est borélien

- f est borélienne positive
- $u_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$.

Le théorème de Tonnelli donne alors

$$\int_{\mathbb{R}} u_{n+1}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{a_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \left(u_n(y) \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y)\,dx \right) dy = \frac{1}{a_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} u_n(y) \times$$

$$\times\ \lambda\Big(\underbrace{\{ x \in \mathbb{R}\ ;\ x - a_{n+1} \leq y \leq x \}}_{= [y,\, y + a_{n+1}]} \Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}} u_n(y)\,dy = 1.$$

$\boxed{10}$. Nous avons u continue positive et $u = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [0,A]$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} u = \int_{[0,A]} u = \int_0^A u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{convergence uniforme}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^A u_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n = 1.$$

$\boxed{11}$ Pour fixer les idées, supposons $\begin{cases} \beta > 0 \\ \lambda > 0 \end{cases}$. Alors

$\varphi(x) = 0$ si $x \notin [\alpha, \alpha + A\beta]$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{[\alpha,\, \alpha + A\beta]} \varphi = \int_\alpha^{\alpha + A\beta} \lambda u \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right) dx \underset{\substack{\text{c.v.} \\ \frac{x-\alpha}{\beta} = y}}{=} \lambda\beta \int_0^A u(y)\,dy =$$

$\lambda\beta$.

Finalement, φ est un noyau régularisant si :

$$\lambda > 0, \beta > 0, \lambda\beta = 1, \quad -1 \leq \alpha \quad , \quad \alpha + A\beta \leq 1.$$

Un exemple approprié : $\alpha = -1$, $\beta = \frac{2}{A}$, $\lambda = \frac{A}{2}$.

Partie II

$\boxed{1}$ Suivons l'indication. Notons que chaque g_m est étagée (détailler !) et que $|g_m| \leq |f|$. (3)

Posons $f_m := g_m - f$ et essayons de montrer que

$\| f_m \| \to 0$.

De (3), nous avons

$$|f_m| \leq 2|f|. \quad (4)$$

Par ailleurs, nous avons $g_m \to f$ (reprendre la preuve de l'approximation d'une fonction mesurable par des fonctions étagées), d'où

$$f_m \to 0 \quad (5).$$

De (4) et (5), nous obtenons par convergence dominée $\|f_m\| \to 0$, qui implique la conclusion désirée.

$\boxed{2}$ Suivons encore l'indication. Posons

$$h_m := \sum_{\substack{-m^2 \leq k \leq m^2 \\ k \neq 0}} \frac{k}{m} \chi_{A_{m,k}}.$$

<u>Etape 1.</u> Nous avons $\lambda(A_{m,k}) < \infty$, $\forall\, k \neq 0$, $\forall m \geq 1$.

<u>Preuve.</u> Rappelons l'inégalité de Markov (ou Tchebychev) : si f est intégrable sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ alors

$$\mu(\{x \in X ; |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{\int_X |f|\,d\mu}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Si $k \neq 0$, alors $A_{m,k} \subset \{x \in \mathbb{R} ; |f(x)| \geq \frac{k}{m^2}\}$, d'où

$$\lambda(A_{m,k}) \leq \frac{\|f\|}{k/m^2}.$$

<u>Etape 2.</u> Nous avons $\| \ _m - f \| \to 0$.

<u>Preuve.</u> De $\boxed{1}$, il suffit de mq $\|g_m - h_m\| \to 0$. Posons $k_m := g_m - h_m$. Alors $|k_m| \leq 2|f|$ (comme dans $\boxed{1}$) et $|g_m - h_m| \leq \frac{1}{m^2}$, d'où $k_m \to 0$. Nous obtenons la conclusion par convergence dominée.

$\boxed{\text{Partie III}}$

$\boxed{1}$ $\boxed{(a)}$, $\boxed{(c)}$ sont clairs.

$\boxed{(b)}$ Si $x \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$, alors $\frac{x}{\varepsilon} \notin [-1,1]$, d'où $\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0$, d'où $\varphi_\varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{(d)}$ Nous avons $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\,dx =$

détails

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \underset{\substack{\text{C.V.}\\ \frac{x}{\varepsilon}=y}}{=} \int_{-1}^{1}\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\,dy = 1.$$

$\boxed{2}$ Posons ($\varepsilon > 0$ étant fixé)

$$g(x,y) := f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y) = \frac{1}{\varepsilon} f(y)\,\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Alors

à x fixé, $g(x,\cdot)$ est mesurable (borélienne), comme produit de fonctions boréliennes (détailler !) (6)

Pour tout $j \geq 0$, nous avons $g(\cdot,y) \in C^j$ et

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(x,y)\right| = \frac{1}{\varepsilon^{j+1}} |f(y)|\left|\varphi^{(j)}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right| \leq \tag{7}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{j+1}} K_j |f(y)| \quad \text{(qui est intégrable)}.$$

Ici, $K_j := \sup_{z\in\mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(z)|$, et $K_j < \infty$, car $\varphi^{(j)}$ est continue " à support compact", donc bornée.

De (6) et (7), nous avons $f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\left(f^\varepsilon\right)^{(j)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^j}{\partial x^j} g(x,y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon^{j+1}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi^{(j)}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy.$$

$$\forall j \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Partie IV

Nous avons $\zeta(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \chi_{K_\varepsilon}(y)\,\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy =$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{K_\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy. \qquad (8)$$

Comme, de plus, nous avons $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)=0$ si $y \notin [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ (ce qui équivaut à $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)=0$ si $\frac{x-y}{\varepsilon} \notin [-1,1]$), nous avons aussi

$$\zeta(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]} \chi_{K_\varepsilon}(y)\,\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy. \qquad (9)$$

Nous allons exploiter (8) pour répondre à $\boxed{2}$, et (9) pour répondre à $\boxed{1}$.

$\boxed{1}$ Si $y \in [x-\epsilon, x+\varepsilon]$, avec $x \in K$, alors $y \in K_\varepsilon$. D'où $\chi_{K_\varepsilon}(y) = 1$. Donc, si $x \in K$, alors

$$\zeta(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy = 1.$$

$\boxed{2}$ Soit $x \notin \Omega$. Si $y \in K_\varepsilon$, alors nous avons $|x-y| > \varepsilon$. En effet : supposons par l'absurde que $|x-y| \leq \varepsilon$. Comme $y \in K_\varepsilon$, nous obtenons l'existence d'un $z \in K$ tq

$|y-z| \leq \varepsilon$. D'où (par inégalité triangulaire) $|x-z| \leq 2\varepsilon$, ce qui implique $x \in K_{2\varepsilon}$. Or, d'après notre choix de ε nous avons $K_{2\varepsilon} \subset \Omega$. Ce qui contredit le fait que $x \notin \Omega$.

De ce qui précède, nous avons $\varphi\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right) = 0$,

car $\left|\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right| > 1$

$\forall y \in K_\varepsilon$. Finalement,

$$\rho(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{K_\varepsilon} \underbrace{\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}_{=0} dy = 0.$$

$\boxed{3}$ Nous avons $0 \leq \chi_{K_\varepsilon}(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y) \leq$ $\varphi_\varepsilon(x-y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, d'où

$$0 \leq \rho(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{K_\varepsilon}(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$$

détailler !

$\boxed{4}$ Nous avons

$$\|\chi_B - \rho\| = \int_{\mathbb{R}} |(\chi_B - \rho)(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} \underbrace{|(\chi_B - \rho)(x)|}_{=0}\, dx$$

$$+ \int_K \underbrace{|(\chi_B - \rho)(x)|}_{=0}\, dx + \int_{\Omega\setminus K} \underbrace{|(\chi_B - \rho)(x)|}_{\leq 1}\, dx \leq \lambda(\Omega\setminus K) < \varepsilon.$$

$\boxed{5}$ Soit $\varepsilon > 0$. Soit g une fonction étagée comme dans II.2, donc de la forme $g = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$, avec $\lambda(A_j) < \infty$ et $\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour chaque j, soit $\zeta_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\| \chi_{A_j} - \zeta_j \| < \frac{\varepsilon}{2m(|a_j|+1)}$. Soit $\zeta := \sum a_j \zeta_j$. Alors $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et (détailler) $\| f - \zeta \| < \varepsilon$.

Partie V

$\boxed{1}\boxed{2}$ Soit $g(\xi, x) := e^{-ix\xi} f(x)$, $\forall x, \xi \in \mathbb{R}$. Alors

à ξ fixé, $g(\xi, \cdot)$ est borélienne (détailler) (10)

à x fixé, $g(\cdot, x)$ est continue (11)

$|g(\xi, x)| = |f(x)|$, et f est intégrable (12)

De (10) - (12), $\hat{f}$ est bien définie et continue.

$\boxed{3}$ Nous avons (par linéarité)

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (f(x) - g(x)) \, dx \right| \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \, dx = \| f - g \|.$$

$\boxed{4}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = 0$ si $x \notin]a,b[$. Alors

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{détailler}}}{=} \int_a^b e^{-ix\xi} f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } \xi \neq 0}}{=} \int_a^b \left(\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right)' f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} f(x)\right]_a^b}_{=0} + \frac{1}{i\xi}\int_a^b e^{-ix\xi} f'(x)\,dx.$$

D'où

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|} \underbrace{\int_a^b |f'(x)|\,dx}_{= C < \infty} = \frac{C}{|\xi|} \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0.$$

$\boxed{5}$ Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $A > 0$ tq $|\hat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, |\xi| > A$. De $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$, nous avons

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon, \quad \forall\, |\xi| > A.$$