Université Lyon 1 — Licence de Mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Mesure et intégration — Année 2013-2014

Fonctions mesurables

Feuille 4

Dans ce qui suit, les espaces mesurables sont désignés $(X, \mathscr{T})$ ou $(X_j, \mathscr{T}_j)$. Sauf mention contraire, X est muni d'une tribu $\mathscr{T}$.

Propriétés élémentaires

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble $[2,3[\cap\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. Une fonction $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
3. Si $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ est mesurable, et si $g : (X_2, \mathscr{T}_2) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée, alors $gof : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée.
4. Si $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ vérifie $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$, $\forall\, F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.
5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
6. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \cos(x) = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Généralisation ?
7. Si $A \subset X$, alors χ_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.
8. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, est borélienne.
9. La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable $\iff$ $|f|$ est mesurable.

Exercice 2 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue mesurables, et $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boréliennes. Peut-on obtenir les propriétés suivantes à partir des résultats du cours ?

1. $h \circ k$ est borélienne.
2. $h \circ k$ est Lebesgue mesurable.
3. $h \circ f$ est Lebesgue mesurable.
4. $f \circ h$ est Lebesgue mesurable.

Exercice 3 Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathscr{T})$ dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$.
2. $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Opérations avec les fonctions mesurables

Exercice 4 Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 5 Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction f_M par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| < M \\ M, & \text{si } f(x) \geqslant M \\ -M, & \text{si } f(x) \leqslant -M \end{cases}.$$

Montrer que f est mesurable $\iff$ f_M est mesurable, $\forall\, M > 0$.

Exercice 6 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler pourquoi $\liminf_{n\to\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sont mesurables.
2. Utiliser la question précédente pour montrer que $B := \{x \in X\,;\,(f_n(x))_{n\geq 0}$ est bornée$\}$ est mesurable.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $g : X \to \mathbb{R}$ par $g(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}\,;\, f_n(x) \geqslant a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 7 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, de mesure finie. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. On se propose de montrer le théorème d'Egoroff, qui affirme que « $f_n \to f$ uniformément sauf éventuellement sur un petit ensemble ».

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose

$$E_n^k = \bigcap_{p\geqslant n}\{x \in X\,;\,|f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

   Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}$. Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? Entre E_n^k et E_n^{k+1} ?
3. Montrer que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \exists\, n_k \in \mathbb{N} \text{ t. q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

4. En déduire le théorème d'Egoroff : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A$.

Exercice 8 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). On note $B(X)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. Si $f \in B(X)$, on pose $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. On remarquera que $B(X)$ est un espace vectoriel.

Soit E un sous-espace vectoriel de $B(X)$. On dit que E est régulier s'il vérifie
(i) $1 \in E$
(ii) Si f et g appartiennent dans E, alors $\max(f, g)$ appartient à E.
(iii) Si (f_n) est une suite d'éléments de E telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ et qui converge simplement vers une fonction f, alors f appartient à E.

1. Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur X et $BM(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées et mesurables (pour $\mathscr{T}$). Montrer que $BM(X, \mathscr{T})$ est un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$.
2. Réciproquement, soit E un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$. On va construire une tribu $\mathscr{T}$ dans X telle que $E = BM(X, \mathscr{T})$.
   (a) Soit $\mathscr{T} := \{A \in \mathscr{P}(X)\,;\, \chi_A \in E\}$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu dans X.
   (b) Montrer que $BM(X, \mathscr{T}) \subset E$.
   (c) On fixe $f \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = \{x \in X\,;\, f(x) \leqslant \alpha\}$ et $g = \max(f, \alpha) - \alpha$. Montrer que $g(x) = 0 \iff x \in A$. On pose ensuite pour $n \geqslant 1$, $g_n = n \inf(g, 1/n)$. Quelle est la limite simple de la suite (g_n) ? En déduire que $A \in \mathscr{T}$, puis que $f \in BM(X, \mathscr{T})$. Conclure.

D'étagée vers mesurable

Dans cette partie, nous exemplifions la technique suivante : pour montrer une propriété commune à toutes les fonctions mesurables, on commence par étudier le cas des fonctions étagées, le cas général s'obtenant par passage à la limite.

Exercice 9 Soit $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par les parties finies de X. Montrer que $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ est mesurable ssi il existe un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ au plus dénombrable tel que $f_{|D^c}$ soit constante. On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 10 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe sur X une plus petite tribu, notée $\mathscr{T}_f$ telle que $f : (X, \mathscr{T}_f) \to \mathbb{R}$ soit mesurable. Est-ce une tribu « connue » ?
2. Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.
3. Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction partie entière.
4. On revient au cas général. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une autre fonction. Montrer le lemme de Doob : g est mesurable (pour la tribu $\mathscr{T}_f$) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $g = h \circ f$. On pourra commencer par le cas où g est étagée.