Université Lyon 1 | Licence de Mathématiques 3e année
Mesure et intégration | Année 2013-2014

Intégrales à paramètres
Feuille 7

Exercice 1 Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$.

1.a Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

1.b Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \exp(-t^2)\,dt$, ainsi que la valeur de $J = \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\,dt$.

Exercice 2
On pose $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$.

1. Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.

2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.

3. Montrer que I est continue en 0.

4.a. Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.

4.b. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4.c. Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer f'' et les limites en ∞ de f et f'.

3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 4 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \to \cos(xt)$ est μ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose alors pour $x \geqslant 0, F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\,d\mu(t)$.

2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. On suppose que l'application $t \to t^2$ est μ-intégrable. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2}$. On pourra utiliser (et justifier) l'inégalité $1 - \cos u \leqslant \frac{u^2}{2}$.

4. On ne suppose plus que $t \to t^2$ est μ-intégrable, mais on suppose que $\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2} = 0$.

4.a. Soit G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \frac{1-F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

4.b. En déduire que $t \to t^2$ est μ-intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.

4.c. Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 5 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.

1. Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.

2. Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

3.a. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.

3.b. En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.

3.c. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.

4. Déduire de tout ceci la valeur de la constante C.

Exercice 6 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}e^{-t^2/2}\,dt$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.a. Montrer que F satisfait une équation différentielle du premier ordre.

3.b. En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera le résultat de la question 2. de l'exercice 1.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)dt$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.

4. En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi le résultat de la question 2. de l'exercice 1.

Exercice 8 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(t,x) = \frac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \to f(t,x)$ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t,x)\,dx$.

   a. Montrer que F est continue sur $]0,\infty[$.

   b. Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.

   c. Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 9 Pour $y > 0$, soit $F(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\,dx$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim\limits_{y\to\infty} F(y)$.

2.a. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.b. Montrer que F vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-x^2)\,dx$.

2.c. En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geqslant 0$.

2.d. Retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer ensuite que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour $x > 0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 12 Soit $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}\,dx$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$ puis $F(t)$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 13 On rappelle qu'on a vu dans la feuille 6, exercice 23, question 4. que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente.

1. Pour tout $t \geq 0$ on pose $S(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin x\,dx$.

1.a. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,\infty[$, et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.

1.b. Déterminer la limite de S en ∞, et calculer $S(t)$ pour tout $t > 0$.

2. Soit $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que $\left| \int_A^\infty \frac{e^{-tx} \sin x}{x} \, dx \right| \leq \frac{2}{A}$.

3. Prouver que pour tout $A > 0$ on a $\lim_{t \to 0+} \int_0^A \frac{e^{-tx} \sin x}{x} \, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x} \, dx$.

4. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$.