Université Lyon 1 | Licence de Mathématiques 3e année
Mesure et intégration | Année 2013-2014

Mesures
Feuille 3

Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$.

Propriétés élémentaires des mesures

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
2. Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
3. Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
4. Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
5. Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\,;\, A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
6. Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\,;\, A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.
7. La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est σ-finie.
8. Soit $\mathcal{C}$ une famille qui engendre $\mathscr{T}$, et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{T}$. On suppose que pour tout C dans $\mathcal{C}$ on a $\mu_1(C) = \mu_2(C)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{T}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.
   Y a-t-il des hypothèses raisonnables à ajouter ou enlever ?

Exercice 2 On rappelle que μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que $\bigcup_n A_n = X$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n. Montrer que si tel est le cas, alors on peut choisir les A_n deux à deux disjoints.

Exercice 3 Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles (A_n) telle que $\mu(A_n) \not\to \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Exercice 4 On suppose $\mu(X) < \infty$. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{S} = \{A \in \mathscr{T}\,;\, \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = \mu(X)\}.$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu.

Inégalités

Exercice 5 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *quelconque* de parties mesurables de X. Etablir les encadrements suivants :

1. $\sup_{n\geqslant 1} \mu(A_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
2. $0 \leqslant \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$.

   Montrer les implications suivantes :

3. $[\mu(A_n) = 0, \forall\, n] \implies \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = 0.$
4. Si $\mu(X) < \infty$ et si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de sous ensembles de X tels que $\mu(X_n) = \mu(X)$ pour tout n, alors on a $\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} X_n\right) = \mu(X)$.

   Et sans l'hypothèse $\mu(X) < \infty$?

Exercice 6

1. Soient A et B deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A\Delta B)$.
2. Soient A et B deux parties mesurables telles que $\mu(A)+\mu(B) > \mu(X)$. Montrer que $A\cap B \neq \emptyset$.
3. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie de parties mesurables telle que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Montrer qu'il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geqslant \dfrac{\mu(X)}{n}$.

Exercice 7

1. Rappeler le principe d'inclusion-exclusion.
2. Etablir l'analogue de ce principe pour des mesures finies, resp. pour des mesures quelconques.

Mesures discrètes

Exercice 8 Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$. On note $D = \{x \in X\,;\, \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est a. p. d.

1. Si μ est finie ?
2. Si μ est σ-finie ?
3. Si μ est quelconque ?

.

Exercice 9 On suppose que $\{x\} \in \mathcal{T}$ et $\mu(\{x\}) < \infty$, $\forall\, x \in X$. On dit que μ est « diffuse » (ou « continue ») si, pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. On dit que μ est « discrète » s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer que μ est diffuse ssi toute partie a. p. d. A de X est $\mu-$négligeable.
2. Montrer que μ est discrète ssi il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de points de X et une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs telles que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$.
3. On suppose maintenant μ σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Mesure image

Exercice 10 Soient $(X, \mathscr{T})$ et $(Y, \mathscr{S})$ des espaces mesurables, et $f : X \to Y$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. On définit $f_*\mu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ par $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathscr{S}$.

1. Montrer que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathscr{S}$. C'est la « mesure image » de μ par f.
2. On choisit $\mu = \delta_a$, où $a \in X$. Déterminer $f_*\delta_a$.
3. On suppose que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$ vérifiant $\mu(X) = 1$. On fixe $B \in \mathscr{T}$ et on choisit $(Y, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Théorème du retour de Poincaré

Exercice 11 On suppose $\mu(X) < \infty$.Une application mesurable $f : X \to X$ « préserve la mesure μ » si $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. Pour un tel f, on considère la suite $(f^n)_{n\geq 1}$ des itérés de f : $f^1 = f$ et $f^{n+1} = f^n \circ f$, $\forall\, n \geqslant 1$.

1. Montrer que f^n préserve μ pour tout $n \geqslant 1$.
2. On fixe $A \in \mathscr{T}$. Soit $F := \{x \in A\,;\ f^n(x) \notin A,\ \forall\, n \geqslant 1\}$. Montrer que $F \in \mathscr{T}$.
3. Pour $p \geqslant 1$, soit $F_p = (f^p)^{-1}(F)$. Montrer que les ensembles (F_p) sont deux à deux disjoints.
4. En déduire le (premier) théorème du retour de Poincaré : pour μ-presque tout $x \in A$, il existe $n = n(x) \geq 1$ tel que $f^n(x) \in A$.

Mesures boréliennes *vs* fonctions càdlàg

Exercice 12 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \mu(]-\infty, t])$.

1. Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$, croissante, et que $F(t) \to 0$ (resp. $F(t) \to 1$) quand $t \to -\infty$ (resp. $t \to \infty$).
2. Montrer que F est **c**ontinue **à d**roite et admet une **l**imite **à g**auche en tout point. Doux acronyme : F est « càdlàg ».
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que F soit continue sur $\mathbb{R}$.
4. Uniquement dans cette question, on suppose F est continue.
   (a) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $F^{-1}(\{x\})$ est un intervalle compact non vide de $\mathbb{R}$. On note cet intervalle $[s_x, t_x]$.
   (b) Montrer que $t < s_x$ si et seulement si $F(t) < x$.
   (c) Soit $\nu = F_*\mu$ la mesure image de μ par l'application F. Que vaut $\nu(]-\infty, x])$ pour $x \in \mathbb{R}$?
   (d) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un segment $I \subset [a, b]$, de longueur $\dfrac{1}{2}(b - a)$ et tel que $\mu(I) = \dfrac{1}{2}\mu([a, b])$.
5. Réciproquement, on suppose que F est càdlàg, et que $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$, resp. $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 1$. Alors il existe une mesure borélienne μ telle que $F(t) = \mu(]-\infty, t])$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Ce résultat sera admis (voir Gramain, section VI.5). Montrer, plus modestement, l'unicité de μ.
6. Trouver μ dans le cas particulier où $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.