Mesures produits
Feuille 8

On désigne par λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ est notée λ_n. (Donc $\lambda_1 = \lambda$.)

Exercice 1 Soit μ la mesure de comptage sur $([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$.

1. Soit $\Delta := \{(x,x)\,;\, x \in [0,1]\}$. Δ est-il un borélien de $\mathbb{R}^2$? De $[0,1]^2$?
2. Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les calculer.
$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$
et
$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$
3. Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x,y) = y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[a,b] \times [0,1]$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y}\, dy$.

Exercice 3 Pour $y > 0$, on pose $f_y(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$.
2. Soit $g(y,t) = \displaystyle\int_0^1 f_y(x,t)\, dx$. Montrer que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, dx$ est bien définie et que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx$.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$
En déduire que $I = \pi^2/4$.
3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ que
$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t[),\ G_\mu(t) = \mu(]t, +\infty[) \text{ et } H_\mu(t) = \mu(\{t\}).$$

1. Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.

2a. Soit ν une autre mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\nu(\mathbb{R}) = 1$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} F_\mu \, d\nu = \int_{\mathbb{R}} G_\nu \, d\mu$.

2b. Soit $D_\mu = \{t \in \mathbb{R}\,;\, H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu = \{t \in \mathbb{R}\,;\, H_\nu(t) \neq 0\}$. Justifier que les ensembles D_μ et D_ν sont au plus dénombrables et montrer l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}} F_\mu \, d\nu + \int_{\mathbb{R}} F_\nu \, d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{t\})\nu(\{t\}) = 1.$$

Exercice 6 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Pour $s > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$H_s^\mu(x) = H_s(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} \, d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $H_s^\mu = H_s^\nu \Longrightarrow \mu = \nu$.

1. Montrer que H_s est continue sur $\mathbb{R}$ et déterminer la limite de $H_s(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0+} s H_s(a)$.

3. Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0+} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^b H_s(x) \, dx$.

4. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telles que $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$. On suppose que $H_s^\mu = H_s^\nu$ pour tout $s > 0$. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 7 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} (xy)/(x^2+y^2)^2, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.

2. La fonction f est-elle λ_2-intgrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 8 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/(x+1)^2, & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y < 2x \\ -1/(x+1)^2, & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est borélienne.
2. Prouver que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y)$ est Lebesgue-intégrable. Pour tout y, on définit $\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dx$. Montrer que φ est Lebesgue-intégrable et calculer $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \, dy$.

3. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ est Lebesgue-intégrable. Pour tout x, on définit $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$. Montrer que ψ est Lebesgue-intégrable et calculer $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx$.
4. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 9

Pour x réel, soit $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du = 2\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du.$

a. Montrer que la fonction F ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x > 0$.

c. En déduire la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ pour x réel.

a. Ecrire $F(0)^2$ comme une intégrale sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire la valeur de $F(0)$ (on pourra penser aux coordonnées polaires).

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $u_n(x) = x^n e^{-x^2}$ est Lebesgue intégrable sur $[0,\infty[$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx.$$

Calculer I_0. Montrer que l'on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$, pour tout $n \geqslant 0$, et en déduire que

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $y \geqslant 0$ on a

$$\int_0^{\infty} \cos(2xy) e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} y^{2n} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx.$$

En déduire que l'on a pour tout $y \geqslant 0$,

$$\int_0^{\infty} \cos(2xy) e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2}.$$

Exercice 11 Rappelons l'Exercice 23 de la feuille 6 : bien que la fonction $x \mapsto \sin x / x$ ne soit pas λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la limite suivante

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existe et est finie.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \exp(-xy)\sin x$. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$?

2. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[0,A] \times \mathbb{R}_+$ pour tout nombre $A > 0$.

3. En déduire la valeur de I.

Exercice 12 En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x} \sin(2xy) \, dy dx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx.$

Exercice 13 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Pour x réel, on pose

$$\phi(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp(\imath xt) \, d\mu(t).$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \exp(-\imath ax)\phi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} K_n(t-a) \, d\mu(t),$$
où K_n est une fonction que l'on explicitera.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \exp(-\imath ax)\phi(x) \, dx.$
4. En déduire que si ϕ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}$, alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 14 Dans cet exercice, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+ \, ; \, f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. En utilisant le théorème de Tonnelli, prouver "le principe de la baignoire" :
$$\int_E f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{x \in E \, ; \, f(x) \geq t\}) \, dt. \tag{1}$$
3. Soit maintenant $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe C^1 nulle en 0. En vous inspirant de la question précédente, et en utilisant le fait que $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi'(t) \, dt$, montrer le que
$$\int_E \varphi \circ f d\mu = \int_0^{\infty} \varphi'(t)\mu(\{x \in E \, ; \, f(x) \geq t\}) \, dt. \tag{2}$$
4. Montrer que (**??**) et (**??**) sont valides sans supposer la mesure μ σ-finie. [Indication : commencer par le cas où f est étagée.]