Université Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de Mathématiques 3e année
Année 2013-2014

Convergence monotone. Convergence dominée

Feuille 6

Intégration

Exercice 1 Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Si $f = \chi_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\int f d\mu = \mu(A)$.
2. Si $f : E \to [0, \infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$, alors f est intégrable.
3. Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 2 Ecrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ lorsque :

1. μ est une mesure de Dirac.
2. μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3 Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty]$ une application mesurable. Montrer que :

1. $\displaystyle\int_X f d\mu < \infty \Longrightarrow f < \infty$ μ-p. p.
2. $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0$ μ-p. p.

Exercice 4 On considère la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si} \quad \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si} \quad \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f est Lebesgue intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer l'intégrale de Lebesgue $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$.

Théorème de convergence monotone

Exercice 5 Soient μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$ et $f : X \to [0, \infty]$ une application mesurable.

1. Soit $A = \{x \in X \,;\, f(x) \geqslant 1\}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f^n\, d\mu$.
2. On suppose $\displaystyle\int_X f\, d\mu < \infty$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{A^c} f^n\, d\mu$.

Exercice 6 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

1. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers f. On suppose que f_0 est intégrable (c'est à dire que $\int f_0\, d\mu < \infty$). Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (\cos \pi t)^{2n}\, d\mu(t)$.

2. Montrer que $I_n < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 7 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$. Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt}\, d\mu(t)$.

1. Montrer que la fonction F est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Montrer que la fonction F est décroissante.
3. Soit (x_n) une suite croissante de réels positifs tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$. Conclusion ?

Exercice 8

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que :
   (H1) $a_{n,k} \geqslant 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$;
   (H2) pour tout entier n fixé, la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   On note $a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit (μ_k) une suite de mesures sur $\mathscr{T}$ telles que :
   (H) pour tout $A \in \mathscr{T}$, la suite $(\mu_k(A))$ est croissante.
   Pour $A \in \mathscr{T}$, on note $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(A)$.
   En utilisant la question 1., montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$.
3. Sous les hypothèses de la question 2., montrer que pour toute fonction $f : X \to [0, \infty]$, f $\mathscr{T}$-mesurable, la suite $(\int f d\mu_k)$ est croissante (on pourra commencer par le cas où f est étagée).
4. Sous les hypothèses de la question 2., montrer que pour toute fonction $f : X \to [0, \infty]$, f $\mathscr{T}$-mesurable, on a
   $$\lim_{k\to\infty} \int f\, d\mu_k = \int f\, d\mu.$$
   On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 9

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes positives de I dans $\mathbb{R}$, alors
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \right) dx.$$
2. En déduire la valeur de
   $$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 10 Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite suivante :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice 11 Soient $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que μ est finie. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty$.
2. On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n\mu(F_n) < \infty$.

Théorème de convergence dominée

Exercice 12 Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x^3} dx.$$

[Indication : Comment majorer $\sin u$ quand u proche de 0 ?]

Exercice 13 Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable.

1. Pour $n \geqslant 0$, soit $A_n = \{x \in X \,;\, |f(x)| \geqslant n\}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu$.
2. On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. On fixe $A \in \mathscr{T}$ tq $\mu(A) < \infty$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f^{1/n} d\mu$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \exp(-n\sin^2 x) f(x)\, dx.$$

Exercice 15 Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp(a|t|)\, d\mu(t) < \infty$, $\forall a \geqslant 0$.

1. Montrer que $t \longmapsto t^n$ est μ-intégrable pour tout entier positif n.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $t \longmapsto \exp(zt)$ est μ-intégrable.
3. On pose $F(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp(zt)\, d\mu(t)$. Montrer que F a un développement en série entière de la forme
$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$
où l'on explicitera les coefficients (a_n).

Exercice 16 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré ; on suppose que la mesure μ est finie. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction $\mathscr{T}-$ mesurable et, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_X \frac{f^n}{1+f^n}\, d\mu$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 17 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions $\mu-$intégrables convergente vers 0 μ-p. p. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_X f_n\, d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \right) d\mu.$$

On pourra utiliser la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

Exercice 18 On considère pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, les fonctions $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, f_n est Lebesgue-intégrable sur $]0, \infty[$.
2. Démontrer que pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, on a $f_n(x) \leqslant \dfrac{4}{x^2}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx$.

Exercice 19 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\, dx$. Expliquer.

Exercice 20 On munit l'espace $[0, 1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} .$$
Calculer $\liminf \displaystyle\int f_n\, d\lambda$, $\displaystyle\int \liminf f_n\, d\lambda$, $\limsup \displaystyle\int f_n\, d\lambda$ et $\displaystyle\int \limsup f_n\, d\lambda$.
2. Même question avec la suite de fonctions (g_n) définie par $g_{2p} = \chi_{[0,1/(2p)]}$, $g_{2p+1} = \chi_{[1/(2p+1),1]}$.

Exercice 21

1. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on peut écrire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$. Et pour $x = 0$?
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 22 Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ une application intégrable. Montrer le lemme de Lebesgue :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tq } [\forall A \in \mathscr{T},\ \mu(A) \leq \delta] \implies \int_A f d\mu \leq \varepsilon \ .$$
[Indications. Etablir ce résultat quand f est de plus bornée. Puis introduire $f_n = \min(f, n)$.]

Exercice 23 Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne.

1. On suppose $I =]0, 1[$. Soit $0 < \alpha < \infty$. A quelle condition la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur I ?
2. Même question avec $I = [1, \infty[$ et $I =]0, \infty[$.
3. Dans la suite de l'exercice, on suppose $I =]0, \infty[$, et on considère la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f n'est pas intégrable sur I.
4. On introduit $f_n = f \cdot \chi_{]0,n]}$; montrer que (f_n) converge uniformément vers f , que chaque f_n est intégrable sur I, et que $\displaystyle\int_I f_n\, d\lambda$ a une limite quand $n \to \infty$.
5. Conclusion ?

Exercice 24 Montrer que les fonctions suivantes sont λ-intégrables sur I et déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \, d\lambda$

1. $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$, où $1 < \alpha < 2$.
2. $I = [A, \infty[$ (avec $A > 0$) et $f_n(x) = \dfrac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$.
3. $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[1/n, 2/n[}(x)$.

Exercice 25 On pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)\chi_{[0,1]}(x)$.

1. Déterminer la limite simple (notée f) de la suite (f_n).
2. Montrer que $e^{-u} \geq 1 - u$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx\right)$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$