Université Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de Mathématiques 3^{e} année
Année 2013-2014

Tribus

Feuille 2

Propriétés élémentaires des tribus

Exercice 1 Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Un ouvert ou un fermé est un borélien.
2. Un borélien est un ouvert ou un fermé.
3. Un intervalle est dans $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
4. Si X est dénombrable, alors toute tribu sur X est a. p. d.
5. $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ est une tribu si elle vérifie :
   (a) $\emptyset \in \mathscr{T}$.
   (b) $A \in \mathscr{T} \implies A^c \in \mathscr{T}$.
   (c) $[A_n \in \mathscr{T},\ \forall\, n \in \mathbb{N}] \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Engendrement

Exercice 2 Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par une famille dénombrable.

Exercice 3 Déterminer les tribus engendrées par les familles suivantes.

1. $\mathscr{A} = \{A\}$, avec $A \subset X$ fixé.
2. $\mathscr{A} = \{A \subset X\,;\, A_0 \subset A\}$, avec $A_0 \subset X$ fixé.

Exercice 4 Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Si $A \in \sigma(\mathscr{A})$, montrer qu'il existe une partie a. p. d. $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ telle que $A \in \sigma(\mathscr{B})$. [Indication : on pourra considérer

$$\mathscr{C} = \{A \in \sigma(\mathscr{A})\,;\, \exists\, \mathscr{B} \subset \mathscr{A} \text{ a. p. d. telle que } A \in \sigma(\mathscr{B})\}.]$$

Exercice 5 Un espace métrique (X, d) est σ-compact si on peut écrire $X = \bigcup_{j\geq 0} K_j$, avec K_j compact, $\forall\, j$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
2. Montrer que, si X est σ-compact, alors $\mathscr{B}(X)$ est engendrée par les compacts de X.

Tribus et partitions

Exercice 6 Nous nous proposons de décrire toutes les tribus a. p. d. $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$. Pour $x \in X$, soit $A_x := \bigcap_{x\in A\in\mathscr{T}} A$.

1. Montrer que $A_x \in \mathscr{T}$.
2. Montrer que, pour tout $x, y \in X$: ou bien $A_x = A_y$, ou bien $A_x \cap A_y = \emptyset$.
3. En déduire que les A_x engendrent une partition a. p. d. $X = \bigsqcup_{i\in I} B_i$ de X.

4. Montrer que $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in J} B_i \, ; \, J \subset I \right\}$.
5. Application : décrire les tribus d'un ensemble à 2, 3, 4 éléments.

Exercice 7

1. Soit $X = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ une partition de X (pas forcément a. p. d.). Déterminer la tribu engendrée par la famille $(B_i)_{i \in I}$. Cas particulier : $I = X$ et $B_x = \{x\}$.
2. Application : montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ n'est pas engendrée par une partition de $\mathbb{R}$.

Union de tribus

Exercice 8

1. Montrer que l'union de deux tribus n'est pas forcément une tribu.
2. Bien sûr, l'union d'un nombre fini de tribus ordonnées est une tribu. Ce résultat ne passe pas à une union infinie. En effet, soit $\mathscr{T}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathscr{P}([\![0, n]\!])$. Montrer que $(\mathscr{T}_n)$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$, mais que $\bigcup_{n \geq 0} \mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.

limsup, liminf d'ensembles

Exercice 9 Soit $(A_n) \subset \mathscr{P}(X)$. On définit $A := \liminf_{n \to \infty} A_n$ et $B := \limsup_{n \to \infty} A_n$ par $\chi_A := \liminf_{n \to \infty} \chi_{A_n}$ et $\chi_B := \limsup_{n \to \infty} \chi_{A_n}$.

1. Montrer que les définitions font sens.
2. Montrer que $x \in A \iff \exists\, n_0$ tq $x \in A_n, \ \forall\, n \geq n_0$.
3. Montrer que $x \in B \iff \exists$ une infinité de n tq $x \in A_n$.
4. Utiliser le point précédent pour exprimer A et B en fonction de A_n en utilisant les opérations $\cup$ et $\cap$.
5. Trouver une cns pour avoir $A = B$. Si cette condition est satisfaite, alors on écrit $A = B = \lim_{n \to \infty} A_n$.
6. Soit $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ une tribu. Si $A_n \in \mathscr{T}, \forall\, n$, montrer que $A, B \in \mathscr{T}$.

Invariances de la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

Exercice 10

1. Soient (X, d), (Y, δ) espaces métriques, et soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme (càd Φ est bijectif, et Φ et Φ^{-1} sont continus). Montrer que, pour $A \subset X$, on a $A \in \mathscr{B}(X) \iff \Phi(A) \in \mathscr{B}(Y)$.
2. Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ est invariante par isométries : si R est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, alors $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \implies R(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Cas particulier : la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ est invariante par translation.
3. Montrer que $\{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \, ; \, B = -B\}$ est une tribu.

Ensembles associés aux fonctions

Exercice 11 Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f_k, f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue en $x \in X \iff \forall\, \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $|f(y) - f(z)| < \varepsilon, \forall\, y, z \in V$.
2. En déduire que $\{x \in X \, ; \, f$ continue en $x\}$ est un borélien.
3. Si les f_n sont boréliennes, alors $\{x \in X \, ; \, (f_n(x))$ converge$\}$ est un borélien.