Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020

Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles

Feuille 6.

Dans les exercices suivants nous décortiquons la construction de l'ultraproduit (et de son cousin, le produit réduit).

Exercice 1. Soit I un ensemble, et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Pour chaque $i \in I$, soit M_i un ensemble. On pose $N = \prod_i M_i$.

Pour $a, b \in N$, on définit $a \sim b$ (ou $a \sim_{\mathcal{F}} b$) si

$$\{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{F}.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Dans la suite, on note

$$\overline{N} = N/{\sim} = \big\{[a] : a \in N\big\}.$$

Exercice 2. Continuant l'exercice précédent, supposons que pour chaque $i \in I$ on ait une relation $R_i \subseteq M_i^k$. Posons

$$R = \Big\{(a, b, \ldots) \in N^k : \big\{i : (a_i, b_i, \ldots) \in R_i\big\} \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Montrer que R est $\sim$-invariant : si $a \sim a'$, $b \sim b'$ et ainsi de suite, alors

$$(a, b, \ldots) \in R \iff (a', b', \ldots) \in R.$$

Ainsi, nous pouvons définir

$$\begin{aligned}\overline{R} &= \Big\{\big([a], [b], \ldots\big) \in \overline{N}^k : (a, b, \ldots) \in R\Big\} \\ &= \Big\{\big([a], [b], \ldots\big) \in \overline{N}^k : \big\{i : (a_i, b_i, \ldots) \in R_i\big\} \in \mathcal{F}\Big\},\end{aligned}$$

sans que cela ne dépende du choix des représentants.

Exercice 3. C'est quoi R lorsque chaque R_i est l'égalité de M_i ? Et c'est quoi $\overline{R}$ dans ce cas ? Les connaissons-nous déjà sous un autre nom ?

Exercice 4. Continuant l'exercice précédent, supposons que pour chaque $i \in I$ on ait une fonction $f_i \subseteq M_i^k \to M_i$. Posons

$$f \colon N^k \to N, \qquad f(a, b, \ldots) = \big(f_i(a_i, b_i, \ldots) : i \in I\big).$$

Montrer que f est $\sim$-invariant : si $a \sim a'$, $b \sim b'$ et ainsi de suite, alors

$$f(a, b, \ldots) \sim f(a', b', \ldots).$$

Ainsi, nous pouvons définir

$$\overline{f} : \overline{N}^k \mapsto \overline{N},$$
$$\overline{f}\big([a], [b], \ldots\big) = \big[f(a, b, \ldots)\big] = \big[f_i(a_i, b_i, \ldots) : i \in I\big],$$

sans que cela ne dépende du choix des représentants.

Exercice 5. Conclusion : Soit I un ensemble, et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Pour chaque $i \in I$, soit $\mathcal{M}_i$ un une L-structure. Alors il existe une L-structure $\overline{\mathcal{N}}$ dont l'ensemble sous-jacent est

$$\overline{N} = \prod M_i/\sim,$$

telle que pour chaque symbole de relation k-aire R on ait :

$$\overline{\mathcal{N}} \vDash R\big([a],[b],\ldots\big) \iff \big\{i : \mathcal{M}_i \vDash R(a_i,b_i,\ldots)\big\} \in \mathcal{F},$$

et pour chaque symbole de fonction k-aire f on ait :

$$f^{\overline{\mathcal{N}}}\big([a],[b],\ldots\big) = \big[f^{\mathcal{M}_i}(a_i,b_i,\ldots)\big].$$

En particulier, aucun des deux ne dépend du choix des représentants.

Lorsque $\mathcal{F}$ n'est qu'un filtre, $\overline{\mathcal{N}} = \prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ (le produit des $\mathcal{M}_i$ modulo $\mathcal{F}$) est un *produit réduit*. Lorsque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, $\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ est un *ultraproduit*.

Exercice 6. Soit $\mathcal{M}$ une structure, I un ensemble, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ l'ultrapuissance (càd l'ultraproduit de I copies de $\mathcal{M}$). On définit le *plongement diagonal*

$$f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$$
$$f(a) = [a,a,\ldots].$$

En d'autres mots, $f(a)$ est la classe d'équivalence de la suite constante $(a,a,\ldots) \in M^I$.

1. Montrer que f est injectif. Dans la suite, on identifiera f avec l'identité, et $a \in M$ avec $[a,a,\ldots] \in M^{\mathcal{U}}$.
2. Montrer que sous cette identification, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$.

Exercice 7. Si $\mathcal{M}$ est fini et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, alors $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} = \mathcal{M}$ (i.e., le plongement diagonal est un isomorphisme).

We need to show that the diagonal embedding $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ is surjective. Let $[a_i : i \in I] \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$. Let $b \in M$. Let $I_b = \{i : a_i = b\}$. Then $I = \bigcup_{b\in M} I_b$ and this is a finite union, so $I_b \in \mathcal{U}$ for some $b \in M$.

Why ? $\emptyset = \bigcap_b (I \setminus I_b)$ So $I \setminus I_b \notin \mathcal{U}$ for some b. Then $I_b \in \mathcal{U}$.

Therefore $[a_i : i \in I] = b \in M$.

Exercice 8 (Plongement élémentaire)**.** Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Un *plongement élémentaire* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est une application $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ telle que pour chaque formule $\varphi(\bar{x})$ et $\bar{\in} M$ de la bonne longueur :

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \vDash \varphi\big(f(\bar{a})\big).$$

Monter qu'un plongement élémentaire $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est la même chose qu'un isomorphisme de $\mathcal{M}$ avec une sous-structure élémentaire $\mathcal{M}' \preceq \mathcal{N}$ (donc en particulier, c'est un plongement !)

Exercice 9 (Diagramme élémentaire)**.** On continue l'exercice précédent. Soit $L(M) = L \cup \{c_m : m \in M\}$, c'est à dire L augmenté d'un symbole de constante pour chaque membre de M. Donner une $L(M)$-structure revient à donner une L-structure $\mathcal{N}$, ainsi qu'une application $f\colon M \to N$. On notera la $L(M)$-structure correspondante $\mathcal{N}_f$, de sorte que $c_m^{\mathcal{N}_f} = f(m)$.

En particulier, $\mathcal{M}_{\mathrm{id}}$ est une $L(M)$-structure canonique, et on aura tendance à omettre le id. Soit $T(M) = \mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M})$ (c'est le *diagramme élémentaire de* M).

Montrer qu'une application $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un plongement élémentaire si et seulement si $\mathcal{N}_f \vDash T(M)$. Informellement, on dira que les plongements élémentaires de $\mathcal{M}$ sont exactement les modèles de sont diagramme élémentaire $T(M)$.

Recall from the previous ex : if $f\colon M \to N$ is any map then N_f is the $L(M)$-structure in which each constant $m \in M$ is interpreted as $f(m)$. So, if $\psi(\bar{x})$ is an L-formula, and $\bar{m} \in M^n$, then $\psi(\bar{m})$ is an $L(M)$-sentence (and every $L(M)$-sentence is of this form) and :

$$N_f \vDash \psi(\bar{m}) \Longleftrightarrow N \vDash \varphi(f(\bar{m}))$$

Exercice 10. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Supposons que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

1. Chaque $\varphi \in T(M)$ est un énoncé de $L(M)$.
   By definition : $T(M)$ is a theory in the language $L(M)$.
2. Pour chaque $\varphi \in T(M)$ il existe une application $f_\varphi\colon M \to N$ tel que $N_{f_\varphi} \vDash \varphi$.
   We may rewrite φ as $\psi(\bar{m})$, where ψ is an L-formula and $\bar{m} \in M^n$. Then $\mathcal{M} \vDash \exists\bar{x}\psi$. This is an L-sentence. Therefore $\mathcal{N} \vDash \exists\bar{x}\psi$. Therefore there exist $\bar{a} \in N^n$ such that $\mathcal{N} \vDash \psi(\bar{a})$. Let f_φ send $m_i \mapsto a_i$ (and other members of M to anything), and we have

   $$\mathcal{N}_{f_\varphi} \vDash \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi(f_\varphi(\bar{m})) \Longleftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi(\bar{a})$$

   and the last one is true.
3. Pour chaque $\varphi \in T(M)$, soit $A_\varphi \subseteq T(M)$ l'ensemble de $\psi \in T(M)$ tel que φ soit une conséquence logique de ψ == φ is a consequence of ψ == ψ implies φ Alors il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur $T(M)$ tel que

   $$\mathcal{F} \supseteq \bigl\{A_\varphi : \varphi \in T(M)\bigr\}.$$

   We need to check that if $\varphi_i \in T(M)$ for, say, $i < k$, then $\bigcap A_{\varphi_i} \neq \emptyset$. Let $\psi = \varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{k-1}$. Then $\psi \in T(M)$, and $\psi \in \bigcap_i A_{\varphi_i}$.
4. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $T(M)$ ayant la même propriété.
   Every filter extends to an ultrafilter.
5. Définissons $f\colon M \to N^{\mathcal{U}}$ par :

   $$f(m) = \bigl[f_\varphi(m) : \varphi \in T(M)\bigr].$$

   Alors $(\mathcal{N}^{\mathcal{U}})_f = \prod_\varphi(\mathcal{N}_{f_\varphi})$, et c'est un modèle de $T(M)$.
   Let us check that $(N^{\mathcal{U}})_f \vDash T(M)$. Let $\varphi \in T(M)$. Then $\varphi = \psi(\bar{m})$, where $\bar{m} \in M^n$ and ψ is an L-formula. We need to check that $(N^U)_f \vDash \psi(\bar{m})$ i.e., $N^U \vDash \psi(f(\bar{m}))$.
   I.e. :

   $$N^U \vDash \psi\bigl([f_\rho(m_0) : \rho \in ...], [f_\rho(m_1) : \rho \in ...]...\bigr)$$

   $$N^U \vDash \psi\bigl([f_\rho(\bar{m}) : \rho \in ...]\bigr)$$

   By Łoś : this is equivalent to :

   $$\Bigl\{\rho \in T(M) : N \vDash \psi\bigl(f_\rho(\bar{m})\bigr)\Bigr\} \in U.$$

   same as :

   $$\Bigl\{\rho \in T(M) : N_{f_\rho} \vDash \varphi\Bigr\} \in U.$$

But : if $\rho \in A_\varphi$, then : $N_{f_\rho} \vDash \rho$ and *a fortiori* $N_{f_\rho} \vDash \varphi$ (since $\rho \in A_\varphi$ means that ρ implies φ). Therefore :

$$\left\{\rho \in T(M) : N_{f_\rho} \vDash \varphi\right\} \supseteq A_\varphi \in U.$$

So we are done : $(N^U)_f \vDash \varphi$, so $(N^U)_f \vDash T(M)$.
(In essence we have just proved that $f \colon M \to N^U$ is an elementary embedding.)

Exercice 11. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Sont équivalents :

1. $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$
2. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{M}$ admet un plongement élémentaire $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}^{\mathcal{U}}$.

Easy : $2 \implies 1$. If $f : M \to N^U$ is elementary then $f(M) \preceq N^U$ ($f(M)$ being the image). Then : $M \equiv f(M) \equiv N^U \equiv N$ (we are using twice the fact that $M \preceq N$ implies $N \equiv M$).

[In fact : assume $M \subseteq N$. Then $M \preceq N$ iff $\mathrm{Th}_{L(M)}(M) = \mathrm{Th}_{L(M)}(N)$. This implies $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$ in the language L (which we omit because it is "the" language)]

Difficult : $1 \mapsto 2$. We have already done the work in the previous exercise.

Exercice 12. Si $\mathcal{M}$ est fini et $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Indeed, if $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, then for some ultraflter U we have an elementary embedding $N \to M^U$. But $M^U = M$, so N is finite, $|N| \leq |M|$. Same argument, other way : $|M| \leq |N|$, so $|N| = |M|$ (we have already seen this). So the elementary embedding $N \to M (= M^U)$ must be surjective, i.e., and isomorphism.

Exercice 13. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis arbitrairement grands a un modèle infini.

$T \cup \{\varphi_n : n \in \mathbf{N}\}$ is finitely consistent, where φ_n says there there are at least n elements. Just apply compactness.

Exercice 14. Montrer que pour une théorie T, sont équivalents :

1. T est finiment axiomatisable (i.e., admet un ensemble fini d'axiomes).
2. T admet un ensemble d'axiomes consistant en un seul énoncé.
3. Pour tout système d'axiomes Σ pour T il existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ fini qui axiomatise T.

$1 \implies 2$ Take the conjunction of the (finitely many) axioms.

$3 \implies 1$ Take $\Sigma = T$

$2 \implies 3$ Let φ be a sentence that axiomatises T. Let Σ be any set of axioms for T. Then $\Sigma \vDash \varphi$ (since $\varphi \in T$). Then there is $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finite s.t. $\Sigma_0 \vDash \varphi$ (by compactness V2) But $\varphi \vDash T$ so $\Sigma_0 \vDash T$.

Compactness Theorem :
V1. Any finitely consistent set is consistent.
V2. If $\Sigma \vDash \varphi$ (Σ being a set of sentences and φ a sentence) then a finite subset of Σ implies φ.
rmk : V1 $\iff$ any contacdictory set of sentences contains a finite contradictory subset.

V1 $\implies$ V2 : Assume $\Sigma \vDash \varphi$. Then $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ is contradictory. So there exists finite $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ such that $\Sigma_0 \cup \{\neg\varphi\}$ is contradictory. But then $\Sigma_0 \vDash \varphi$.

V2 $\implies$ V1 : take $\varphi = \bot$ (false) : Σ is contradictory iff $\Sigma \vDash \bot$.

Exercice 15. Soit L un langage, θ un énoncé de ce langage et T_1, T_2 deux théories dans ce langage contenant θ. On suppose que tout modèle de θ est soit modèle de T_1, soit modèle de T_2 mais jamais des deux théories. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

[TRY TO THINK : is this related to what happens in a totally disconnected compact topological space.]

Any model of $T_1 \cup T_2$ is a model of θ, and therefore cannot be a model of both T_1 and T_2 (by the hypotheses of the question), absurd. So : the union $T_1 \cup T_2$ has no models. It's contradictory. By compactness : there are finite subsets $\Sigma_1 \subseteq T_1$ and $\Sigma_2 \subseteq T_2$ such that $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ is contradictory.

We may assume that $\theta \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Let's be optimistic and try to prove that Σ_1 axiomatises T_1. We know that $\Sigma_1 \subseteq T_1$, so we need to show that every model of Σ_1 is a model of T_1. So let $M \vDash \Sigma_1$. Then $M \vDash \theta$. So $M \vDash T_1$ or $M \vDash T_2$ (but not both, not important here). If $M \vDash T_2$, then $M \vDash \Sigma_2$ so $M \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, absurd. So $M \vDash T_1$.

Same way, Σ_2 axiomatises T_2, and we are done.

Exercice 16. On considère le langage $L = \{E\}$ où E est une relation binaire.

1. Existe-t-il une théorie dans le langage L dont les modèles sont exactement les relations d'équivalence n'ayant que des classes finies sur un ensemble infini ?
2. Existe-t-il une théorie dans le langage L dont les modèles sont exactement les relations d'équivalence n'ayant qu'un nombre fini de classes sur un ensemble infini ?
3. La théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes, toutes infinies, est-elle finiment axiomatisable ?

Exercice 17.
1. Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de L_{gp}-formules tel que dans tout groupe G un élément g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.

   Assume such $\Phi(x)$ existed.

   Let T be the theory of groups. Let c be a new constant. Consider :
   $$T \cup \Phi(c) \cup \{c^n \neq 1 : n \in \mathbf{N}\}.$$
   Any finite subset is contained (for some m) in
   $$T \cup \Phi(c) \cup \{c^n \neq 1 : n \leq m\}.$$
   The group $G = \big(Z/(m+1)Z, +\big)$ with $c = 1$ is a model. By compactness, the original set has a model, absurd.

   Therefore, such Φ does not exist.

   (alternatively, use Łoś : take an ultraproduct of all $\big(Z/nZ, +\big)$ and $c = [1, 1, 1, \ldots])$
2. Peut-on axiomatiser les groupes de torsion ?

   No, again consider all $(Z/nZ, +)$. Their ultraproduct is not a torsion group.

Exercice 18. Soit L un langage fini ou dénombrable et soit T une théorie dans le langage L.

1. Montrer que si T a un modèle infini alors T a un modèle de cardinalité κ pour tout cardinal infini κ.
2. Soit κ un cardinal infini. Montrer que si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ (on dit qu'une telle théorie est *κ-catégorique*) et n'a pas de modèle fini alors T est complète.

3. Montrer que la théorie des ordres totaux denses sans extrémité est $\aleph_0$-catégorique. Est-elle $\aleph_1$-catégorique ?
4. Soit $L_{\mathbf{Q}} = \{0, +, \lambda_q : q \in \mathbf{Q}\}$ le langage des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels et T la théorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels dans ce langage. Pour quels cardinaux κ, T est-elle κ-catégorique ?
5. Soit p un nombre premier, $L_{\mathbf{F}_p} = \{0, +, \lambda_k : k \in \mathbf{F}_p\}$ le langage des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels et T la théorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels infinis dans ce langage. Pour quels cardinaux κ, T est-elle κ-catégorique ?
6. Soit p un nombre premier ou soit $p = 0$. Pour quels cardinaux κ, la théorie CAC_p des corps algébriquement clos de caractéristique p est-elle κ-catégorique ?
7. Pour quels cardinaux κ, la théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes, toutes infinies, est-elle κ-catégorique ?
8. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.
   (a) Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
   (b) La théorie T est-elle complète ?

Exercice 19. Soit L un langage fini et T une théorie dans le langage L. Montrer que si dans tous les modèles de T les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies, alors il y a une fonction $f : \omega \to \omega$ telle que pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments d'un modèle de T est de cardinal inférieur à $f(n)$.

Exercice 20. Nous considérons un langage L comprenant une infinité dénombrable de symboles de relations binaires : $L = \{E_i | i < \omega\}$.

1. Ecrire les énoncés qui disent que pour tout $i < \omega$, E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe et que les classes de E_{i+1} sont obtenues en divisant chaque E_i-classe en exactement deux classes infinies.
2. Montrer que la structure suivante est un modèle dénombrable des énoncés du premier point :

   $$\mathcal{M}_0 = \langle \{f \in 2^\omega : \text{il existe } i < \omega \text{ tel que pour tout } j \geq i,\ f(i) = f(j).\ \}\,; E_i(x_1, x_2)\ (i < \omega) \rangle\ ,$$

   où pour tout $i \in \omega$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in E_i^{\mathcal{M}_0}$ si et seulement si $\sigma_1 \lceil i = \sigma_2 \lceil i$.
   Le point 2 montre que les énoncés du premier point forment un ensemble consistant. Ces énoncés et leurs conséquences seront notés T.
3. Nous dirons qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tel que $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire riche de même cardinal que lui.
4. Montrer que deux modèles riches sont ∞-équivalents. En déduire que T est complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?