Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 8 – Élimination des quanteurs.

Exercice 1. Soit ACF la théorie des corps algébriquement clos. Pour p premier, soit :

$$ACF_p = ACF \cup \{p = 0\},$$

dans lequel p est $1 + \ldots + 1$ p. Posons aussi

$$ACF_0 = ACF \cup \{p \neq 0 : p \text{ premier}\}.$$

1. Montrer que pour p premier ou nul, les modèles de ACF_p sont exactement les corps algébriquement de caractéristique p.
2. Montrer que chaque théorie ACF_p est complète.
3. Réciproquement, montrer que toute complétion de ACF (c.à.d., théorie complète qui contient ACF) est de la forme ACF_p pour p premier ou nul.

Exercice 2.
1. Décrire l'espace topologique $S_0(ACF)$.
2. Décrire l'espace topologique $S_1(ACF_p)$ pour p premier ou nul.
3. Soit K un corps, $L = K^a$ sa clôture algébrique. Décrire l'espace topologique $S_1(K)$. Hélas cette notation est ambiguë : j'y entends, les types, dans le sens du corps algébriquement clos L, avec paramètres dans K.

Exercice 3.
1. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?
2. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
3. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?

Exercice 4. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. On a vu dans la feuille 6 que T est complète. En vous inspirant de la preuve de la complétude, montrer que T élimine les quantificateurs. Décrire $S_1(T)$. Est-ce que tous les types de $S_1(T)$ sont réalisés dans chacun des modèles de T ?

Exercice 5.
1. Donner une axiomatisation de la théorie T des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.
2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?
3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.
4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x\ x < S(x) \wedge \neg\exists y(x < y < S(x))$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.
5. En déduire que T est également complète et décrire les n-types de T.

6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de cette théorie, si $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$ alors $\mathcal{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.

Exercice 6. On travaille dans le langage $L = \{<\}$. Soit DLO la théorie des ordre denses sans extrémités.

1. Montrer que DLO est complète et élimine les quanteurs.
2. En déduire que $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}, <) = DLO$ et $(\mathbf{Q}, <) \preceq (\mathbf{R}, <)$.
3. Soit $(M, <)$ un modèle de DLO. Montrer que toute partie définissable (avec paramètres) $D \subseteq M$ est une réunion finie de points et d'intervalles ouverts.

   Une (théorie d'une) structure ordonnée ayant cette propriété est dite *o-minimale*.
4. Montrer que, de surcroît : on peut le faire de sorte que les points et les extrémités (finies) des intervalles figurent parmi les paramètres.
5. Soient $(M, <) \subseteq (N, <)$ des modèles de DLO. Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ une formule, $\bar{a} \in M^m$, $\bar{b} \in N^n$. Montrer que s'il existe un $c \in N$, distinct de tous les b_j, tel que $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}, c)$, alors un tel c existe aussi dans M.