Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

**Théorie des modèles**
Feuille 9 : saturation

**Exercice 1.** Parmi les structures de corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^a$ (clôture algébrique de $\mathbf{Q}$), $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ (dans le langage $L = \{0, 1, -, +, \cdot\}$) quelles sont celles qui sont $\aleph_0$-saturées ?

**Exercice 2.** Soient $\mathcal{M}$ une structure $\aleph_0$-saturée, $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, et $(n_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{N}$. Montrer qu'il existe une famille $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(m_0, ..., m_{k-1})$ et $(n_0, ..., n_{k-1})$ ont même type.
Indication : on peut considérer d'abord le cas où $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.

**Exercice 3** (Critère du va-et-vient)**.**

1. Montrer qu'une théorie $T$ élimine les quantificateurs si et seulement si pour tous deux modèles $\aleph_0$-saturés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de $T$, dès lors qu'ils admettent au moins un isomorphisme partiel (non vide), la famille de tous les isomorphismes partiels finis entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ forme un va-et-vient.
2. Montrer qu'une théorie complète $T$ élimine les quantificateurs si et seulement si pour tous deux modèles $\aleph_0$-saturés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de $T$, la famille de tous les isomorphismes partiels finis entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ forme un va-et-vient.

**Exercice 4.** Soit le langage $L = \{<, c_i : i \in \mathbf{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les $c_i$ sont des constantes. Soit $T$ la théorie des ordres totaux denses sans extrémité telle que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $c_i < c_{i+1}$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle $\aleph_0$-saturé de $T$. Montrer que l'ensemble $A$ des éléments majorants tous les $c_i$ n'a pas de plus petit élément.
2. Montrer que $T$ élimine les quanteurs.
   Indication : on peut le faire directement, ou faire une réduction vers un résultat déjà connu.
3. En déduire que $T$ est complète et élimine les quanteurs.
4. Construire un modèle dénombrable de $T$ qui contient un plus petit majorant de la suite $(c_i)$.
5. Montrer que $T$ a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
6. Montrer qu'il y a deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre et vice versa.

Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $I$ est dit $\aleph_1$-*incomplet* s'il existe une famille dénombrable de $(J_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{U}$ telle que $\bigcap J_n \notin \mathcal{U}$.

- Il est facile de vérifier qu'un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$ est soit principal, soit $\aleph_1$-incomplet.
- Plus généralement, tous les ultrafiltres que nous avons construits sont $\aleph_1$-incomplets (vérifiez !)
- Encore plus fort : si ZFC est consistent, alors ZFC + “tout ultrafiltre non principal est $\aleph_1$-incomplet” est consistent aussi (mais pour cela, il faut travailler un peu).

**Exercice 5** (Les ultraproduits sont saturées)**.** Soit $I$ un ensemble et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre $\aleph_1$-incomplet sur $I$. Soit $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ une famille de structures, et $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ l'ultraproduit.

Le but de cet exercice est de montrer que pour toute famille dénombrables de formules $\pi(\bar{x})$, avec paramètres dans $\mathcal{N}$, si $\pi$ est finiment réalisé dans $\mathcal{N}$ alors $\pi$ est réalisé dans $\mathcal{N}$ (en d'autres mots, si pour tout $\pi_0 \subseteq \pi$ fini il existe $\bar{a} \in N$ tel que $\mathcal{N} \vDash \pi_0(\bar{a})$, alors il existe $\bar{a} \in N$ tel que $\mathbf{N} \vDash \pi(\bar{a})$).

(Une structure ayant cette propriété est appelée $\aleph_1$-compacte.)

1. On peu supposer que $J_0 = I$, $J_n \supseteq J_{n+1}$, et $\bigcap J_n = \emptyset$ (et toujours $J_n \in \mathcal{U}$).
2. Considérons d'abord le cas où $\pi$ est sans paramètres. On énumère $\pi = \{\varphi_n(\bar{x}) : n \in \mathbf{N}\}$, et pose
$$\psi_n(\bar{x}) = \bigwedge_{m<n} \varphi_m(\bar{x}).$$
Posons
$$K_n = \{i \in I : \mathcal{M}_i \vDash (\exists \bar{x})\psi_n\}.$$
Montrer que $K_0 = I \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ et $K_n \in \mathcal{U}$ pour tout $n$.
3. On peut supposer que $J_n \subseteq K_n$ pour tout $n$.
4. Pour chaque $i \in I$, choisir $\bar{a}_i \in M_i$, de sorte que
$$J_n \supseteq \{i \in I : \mathcal{M}_i \vDash \psi_n(\bar{a}_i)\}.$$
5. Posons $\bar{a} = [\bar{a}_i : i \in I] \in \mathbf{N}$ (que cela veut-il dire, lorsque $\bar{x}$ est un uplet et non un singleton ?) Montrer que $\mathcal{N} \vDash \pi(\bar{a})$.
6. Démontrer le cas général, par réduction au cas où $\pi$ n'a pas de paramètres.
7. Montrer que si $L$ est dénombrable, alors $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ est $\aleph_1$-saturé.

**Exercice 6.** Soit $\kappa$ un cardinal fortement inaccessible. Montrer que toute théorie complète sur un langage de cardinalité strictement inférieur à $\kappa$, qui a des modèles infinis, a un modèle $\kappa$-saturé de cardinal $\kappa$.