Partiel : Théorie des ensembles
Corrigé

Exercice 1. La dérivation de Hausdorff
Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.

1. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X compatible avec l'ordre $\leq$, c'est-à-dire tel que $\leq$ passe au quotient. Expliciter cette propriété. On définit alors $D(\sim)$ la relation sur X obtenue en posant
$$xD(\sim)y \Leftrightarrow \text{ il y a un nombre fini de } \sim\text{-classes entre celle de } x \text{ et celle de } y.$$
2. Montrer que $D(\sim)$ est une relation d'équivalence qui étend $\sim$ et qui est toujours compatible avec $\leq$.
3. Expliciter une construction par récurrence transfinie qui, partant de la relation triviale $\sim_0$ (c'est-à-dire $x \sim_0 y$ ssi $x = y$), permette de répéter l'opération D et ainsi de définir, pour tout ordinal α une relation d'équivalence $\sim_\alpha$ compatible avec $\leq$.
4. Que peut-on dire si on applique cette construction à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique ?
5. Montrer que pour tout ordinal α, la relation $\sim_\alpha$ admet une seule classe sur la puissance ordinale ω^α, mais plusieurs sur $\omega^{\alpha+1}$.

Solution.

1. Une relation d'équivalence $\sim$ sur X est compatible avec l'ordre $\leq$ si pour tout $x_1 \sim x_2$ et $y_1 \sim y_2$ tel que $x_1 \not\sim y_1$ alors $x_1 \leq y_1$ si et seulement si $x_2 \leq y_2$. De manière équivalente, les classes d'équivalence sont connexes (pour l'ordre).
2. Si $x \sim y$ il n'y a aucune classe d'équivalence strictement entre celle de x et celle de y (qui sont les mêmes). Ainsi $xD(\sim)y$, et $D(\sim)$ étend $\sim$. La réflexivité en découle. La symétrie est évidente. La transitivité suit du fait que s'il y a un nombre fini k de classes entre les classes de x et de y et un nombre fini k' de classes entre celles de y et de z, il y a au plus $k + k' + 1$ classes entre celles de x et de z.

   Soient $x_1D(\sim)x_2$ et $x_1 \leq y \leq x_2$. Alors il y a au plus autant de classes entre celles de x_1 et de y qu'il y en a entre x_1 et x_2. Ainsi $x_1D(\sim)y$ et les $D(\sim)$-classes sont connexes.
3. On définit par récurrence transfinie une relation binaire $\sim_\alpha$ sur X pour tout ordinal α de la façon suivante :
   — $x \sim_0 y$ ssi $x = y$;
   — $\sim_{\alpha+1} = D(\sim_\alpha)$ pour tout ordinal α ;
   — $\sim_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \sim_\alpha$ pour tout ordinal limite λ.

   Comme une réunion d'une chaîne de relations d'équivalence avec classes connexes est encore une relation d'équivalence avec classes connexes, on obtient de la question précédente (pour les étapes successeur) que pour tout ordinal α, la relation $\sim_\alpha$ est une relation d'équivalence compatible avec $\leq$ qui étend toutes les relations $\sim_\beta$ pour $\beta < \alpha$.
4. — $\mathbb{N}$: comme il n'y a qu'un nombre fini entre deux entiers, la relation $\sim_1$ est totale (et ensuite pour tout $\alpha \geq 1$, $\sim_\alpha = \sim_1$.
   — $\mathbb{Q}$: comme il y a une infinité de rationnels entre deux rationnels distincts, on a $\sim_1 = \sim_0$ (et donc $\sim_\alpha = \sim_0$ pour tout α).
   — $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: on a $(n_1, m_1) \sim_1 (n_2, m_2)$ si et seulement si $n_1 = n_2$, puis $\sim_\alpha$ est totale pour $\alpha \geq 2$.
5. On montre par récurrence transfinie que $\sim_\alpha$ est totale sur ω^α mais $\omega^{\alpha+1}/\sim_\alpha \cong \omega$:
   — L'ordinal $\omega^0 = 1$ est réduit à un unique élément donc $\sim_0$ est totale. Par contre, $\omega/\sim_0 = (\omega/=) = \omega$.
   — Si $\alpha = \beta + 1$ alors $\omega^\alpha/\sim_\beta \cong \omega$ et
   $$\omega^\alpha/\sim_\alpha = \omega^\alpha/D(\sim_\beta) \cong \omega/D(=) = \omega/\sim_1,$$
   ce qui est une seule classe d'après la partie précédente. De même,
   $$\omega^{\alpha+1}/\sim_\alpha = \omega^{\alpha+1}/D(\sim_\beta) \cong \omega^2/D(=) = \omega^2/\sim_1 \cong \omega$$
   d'après la partie précédente (puisque chaque copie de $\omega^\alpha/\sim_\beta \cong \omega$).
   — Si α est un ordinal limite alors $\omega^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega^\beta$, et chaque ω^β est dans une seule $\sim_\beta$-classe, et donc dans une seule $\sim_\alpha$-classe. Ainsi $\sim_\alpha$ est totale sur ω^α. Par contre, chaque copie de ω^α dans $\omega^{\alpha+1}$ est dans une $\sim_\beta$-classe distincte pour tout $\beta < \alpha$, et donc aussi dans une $\sim_\alpha$-classe distincte. Ainsi $\omega^{\alpha+1}/\sim_\alpha \cong \omega$.

Exercice 2. Lemme de König

Un *arbre* est la donnée d'un ensemble S (les sommets) muni d'une relation binaire de succession immédiate et d'un sommet origne r (sa racine) tel que :

— r n'est successeur immédiat d'aucun autre sommet ;

— tout sommet autre que la racine est successeur immédiat d'un unique sommet ;

— tout sommet appartient à une branche partant de r (une suite finie de successeurs immédiats commençant par r).

On dit qu'un arbre est à *branchement fini* lorsque chacun des sommets n'a qu'un nombre fini de successeurs immédiats.

Montrer qu'un arbre infini qui est à branchement fini possède au moins une branche infinie. Quel axiome du choix avez-vous utilisé ?

Solution. On considère un arbre infini sur les sommets S avec racine r. Si $s \in S$, soit S_s l'ensemble des successeurs (pas forcément immédiats) de s (on va dire que s est successeur de lui-même). Ainsi $S_r = S$. Soit $X = \{s \in S : S_s \text{ est infini}\}$. Alors

— $X \neq \emptyset$ car $r \in X$;

— si $s \in X$ et $s_1, \ldots, s_n$ sont les successeurs immédiats de s, alors il y a i tel que $s_i \in X$: puisque $S_s = \{s\} \cup S_{s_1} \cup \cdots \cup S_{s_n}$ et S_s est infini, au moins un des S_{s_i} est infini.

Par l'axiome des choix dépendants, il existe une suite infinie $(s_n)_{n<\omega}$ d'éléments de X tel que s_{i+1} est successeur immédiat de s_i pour tout $i < \omega$. Cette suite forme donc une branche infinie.

En fait, il nous suffira l'axiome de choix dénombrable pour les ensembles finis. On note que X lui-même est un sous-arbre de S. Un chemin de longueur n est une suite $r = x_0, x_1, \ldots, x_n$ telle que x_{i+1} est successeur immédiat de x_i pour $i < n$. Alors pour tout $n < \omega$ on considère l'ensemble F_n des fonctions qui à un chemin $(x_0, \ldots, x_n)$ dans X de longueur n associent un successeur de x_n dans X. Alors F_n est fini et non-vide, soit $f \in \prod_{n<\omega} F_n$. On pose alors $s_0 = r$ et $s_{n+1} = f(n)(s_0, \ldots, s_n)$. Ceci donne un chemin infini dans X, donc dans S.

Exercice 3.

1. Soient κ et λ_i pour $i \in I$ des cardinaux. Montrer que
$$\kappa^{\sum_I \lambda_i} = \prod_I \kappa^{\lambda_i}.$$
2. Supposons que λ est singulier. Montrer qu'il existe des cardinaux réguliers $\mu < \lambda$ et $\theta_i < \lambda$ pour $i < \mu$ tels que pour tout cardinal κ :
$$\kappa^\lambda = \big(\sup_i \kappa^{\theta_i}\big)^\mu.$$

Solution.

1. Soient Y_i pour $i \in I$ disjoints avec $\mathrm{Card}(Y_i) = \lambda_i$. Alors $\kappa^{\sum_I \lambda_i} = \mathrm{Card}(\kappa^{\bigcup_{i\in I} Y_i})$, et $\prod_I \kappa^{\lambda_i} = \mathrm{Card}(\prod_{i\in I} \kappa^{Y_i})$. Il suffit donc de donner une bijection $\sigma : \kappa^{\bigcup_{i\in I} Y_i} \to \prod_{i\in I} \kappa^{Y_i}$. On pose
$$\sigma : f \mapsto (i \mapsto f\restriction_{Y_i}).$$
Alors σ^{-1} est donnée par
$$\sigma^{-1} : (i \mapsto f_i) \mapsto (x \mapsto f_i(x) \text{ si } x \in Y_i),$$
donc σ est bien une bijection.
2. Soient $\mu = \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ et $\theta_i < \lambda$ pour $i < \mu$ croissants tels que $\lambda = \sum_{i<\mu} \theta_i$. Alors
$$\kappa^\lambda = \kappa^{\sum_{i<\mu} \theta_i} = \prod_{i<\mu} \kappa^{\theta_i} \leq \big(\sup_{i<\mu} \kappa^{\theta_i}\big)^\mu \leq \big(\kappa^\lambda\big)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu} = \kappa^\lambda.$$