Introduction à la Logique Mathématique

Seconde partie : Théorie des modèles

Itaï Ben Yaacov, Frank Wagner

Table des matières

Chapitre 1

Langage, structures et théories

1.1 Quelques exemples

Les mathématiques traitent de divers structures mathématiques : Groupes, corps, espaces vectoriels, graphes, espaces de fonctions, surfaces, ou encore l'univers ensembliste. La théorie des modèles, dans un premier temps, fait abstraction de la nature spécifique des ces structures et cherche leurs points communs abstraits :

- Les structures consistent d'un ensemble sous-jacent, leur domaine,
- sur lequel il y a des fonctions et relations (on peut voir des constantes comme fonctions d'arité 0).

Pour la théorie des ensembles, par exemple, on n'a que deux relations, l'égalité $=$ et l'appartenance $\in$. Pour un graphe, on a également deux relations, l'égalité et les liens (arêtes). Dans un groupe il y a l'égalité, ainsi qu'une fonction binaire, le produit (et éventuellement une constante 1 et une fonction unaire, l'inversion). Enfin, un corps possède, à part de l'égalité, deux fonctions binaires (et éventuellement deux constantes 0 et 1, et une fonction unaire, l'inversion additive).
Avec ce langage, on peut exprimer des propriétés de la structure concernée.

Exemple 1.1. 1. L'énoncé

$$\forall x\, \exists y\ x = y \bullet y$$

est vrai dans $\mathbb{Q}$ mais faux dans $\mathbb{Z}$ si on interprète $\bullet$ par l'addition ; il est vrai dans $\mathbb{C}$ mais faux dans $\mathbb{R}$ si on interprète $\bullet$ par la multiplication.

2. Si $R(x, y)$ est une relation binaire, l'énoncé

$$\forall x\, \forall y\, (x = y \leftrightarrow \forall z(R(z, x) \leftrightarrow R(z, y)))$$

est l'axiome d'extensionalité si on interprète R comme appartenance, mais pour un graphe dirait que deux sommets qui ont les mêmes voisins sont égaux.

1.2 Langage et structures

Formalisons.

Définition 1.2. Un *langage* $\mathcal{L}$ consiste en :
- une collection $\{f_i : i \in I\}$ de symboles de *fonction*, chaque symbole f étant doté d'une *arité* $n_f \in \mathbb{N}$,
- une collection $\{R_j : j \in J\}$ de symboles de *relation*, chaque symbole R étant doté d'une *arité* $n_R \in \mathbb{N}$.

On considère les constantes comme des fonctions d'arité 0. Une relation d'arité 0 est une constante propositionnelle.

Définition 1.3. Une *$\mathcal{L}$-structure* $\mathfrak{M}$ consiste d'un ensemble M, le *domaine* de $\mathfrak{M}$, ainsi que
- pour chaque symbole de fonction f d'une fonction $f^{\mathfrak{M}} : M^{n_f} \to M$, et
- pour chaque symbole de relation R d'un sous-ensemble $R^{\mathfrak{M}}$ de M^{n_R}.

Remarque 1.4.
1. Une fonction d'arité 0 est souvent note c, et son interprétation $c^{\mathfrak{M}}$ est un élément de M. Une constante propositionnelle est interpreté soit par vrai, soit par faux.
2. Habituellement, on ne considère que les structures non-vides. On note cependant que deux structures vides peuvent toujours différer par la valeur de leurs constantes propositionnelles, s'il y en a.
3. Tous nos langages comporteront l'égalité $=$ sans la mentionner explicitement ; de plus l'égalité sera toujours interpreté par la diagonale de M^2.
4. Souvent on confond $\mathfrak{M}$ et M.
5. L'application $f \mapsto f^{\mathfrak{M}}$ et $R \mapsto R^{\mathfrak{M}}$ est l'*interprétation* de $\mathcal{L}$ dans $\mathfrak{M}$.

Exemple 1.5.
1. Le langage des ordres $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$ ne contient que deux relations binaires $=$ et $<$. Les structures $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ sont des $\mathcal{L}_{ord}$-structures.
2. Le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ contient une constante 1, une fonction binaire $\cdot$, une fonction unaire $^{-1}$ et l'égalité.
3. Le langage des anneaux $\mathcal{L}_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ contient deux constantes 0 et 1, deux fonctions binaires $+$, $\cdot$, une fonction unaire $-$, et l'égalité.
4. Le langage $\mathcal{L}_{ens}$ de la théorie des ensembles contient une relation binaire $\in$, et l'égalité.

1.3 Satisfaction et conséquence

Afin d'exprimer certaines propriétés d'une structure, on considère des formules obtenues à partir du langage de base. On se restreint ici à un langage *finitaire* (formules de longueur finie) et du *premier ordre* (on ne quantifie que sur des éléments de l'univers). Les logiques *infinitaires* (avec des conjonctions et disjonctions infinies) ou de *second ordre* (où l'on quantifie sur les parties) ont des propriétés bien différentes.

Remarque 1.6. En théorie des ensembles on quantifie bien sur les parties, par exemple dans $\exists x\,(x \subseteq y \wedge \varphi(x)$. Mais c'est toujours une quantification sur les éléments du domaine, et ne concerne que les parties de x qui se trouvent dans ce domaine.

Définition 1.7 (Termes)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage. L'ensemble des *termes* de $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}$-termes) est donné par la récurrence suivante :
— toutes les variables sont des $\mathcal{L}$-termes,
— si f est une fonction n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

Définition 1.8 (Formules)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage. L'ensemble des *formules* de $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}$-formules) est donné par la récurrence suivante :
— *Les formules atomiques* : si R est une relation n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule,
— *Combinaisons booléennes (négation, conjonction, disjonction)* : si φ et ψ sont des formules alors $\neg\varphi$ (*non* φ), $(\varphi \wedge \psi)$ (φ *et* ψ) et $(\varphi \vee \psi)$ (φ *ou* ψ) sont des formules,
— *Quantifications universelle et existentielle* : si φ est une formule et x est une variable alors $\forall x \varphi$ (*pour tout* x on a φ) et $\exists x \varphi$ (*il existe* x tel que φ) sont des formules.

Si φ est une formule et x est une variable, alors les occurrences de x dans les formules $\forall x \varphi$ et $\exists x \varphi$ sont *liées* au quanteur (ou quantificateur) $\forall$ ou $\exists$, exceptées celles qui étaient liées auparavant dans la formule φ. Une variable qui n'est pas liée est *libre*.

En particulier toutes les occurrences des variables dans une formule sans quanteur sont libres. Un *énoncé* (ou *formule close*) est une formule sans variable libre.

Remarque. Une formule est un mot fini constitué de symboles de constantes, fonctions et relations de $\mathcal{L}$, de symboles de variables, de connecteurs et de séparateurs (les paranthèses et la virgule). Ainsi si le langage est dénombrable, l'ensemble des formules l'est aussi.

Exemple 1.9.
1. Les termes de $\mathcal{L}_{ord}$ sont les variables ; les formules atomiques de $\mathcal{L}_{ord}$ sont les égalités et les inégalités.
2. Les termes de $\mathcal{L}_{gp}$ sont les mots en les variables et leurs inverses (avec parenthésage pour indiquer l'ordre des opérations en l'absence d'un axiome d'associativité). Les formules atomiques sont les équations entre mots.
3. Les termes de $\mathcal{L}_{ann}$ sont les polynômes sur $\mathbb{Z}$ en plusieurs variables (encore avec parenthésage). Les formules atomiques sont les équations entre polynômes.

Pour être tout à fait rigoureux dans nos futures définitions et démonstrations par induction sur la construction des formules, il est nécessaire de vérifier que la lecture des formules est unique. Nous laissons la vérification de ce résultat syntaxique au lecteur :

Fait 1.1 (Lecture unique)**.** *1. Chaque terme est soit une variable, soit une constante, soit de la forme $f(t_1, \ldots, t_n)$ où f est une fonction d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes. Cette écriture est uniquement déterminée.*

2. Chaque formule est
- *soit atomique et de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ où R est une relation d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes,*
- *soit de la forme $\neg\varphi$ où φ est une formule,*
- *soit de la forme $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ou de la forme $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ où φ_1 et φ_2 sont deux formules,*
- *soit de la forme $\exists x\varphi$ ou de la forme $\forall x\varphi$ où φ est une formule et x est une variable.*

Cette écriture est uniquement déterminée.

Notation. Par la suite on désignera par $\bar{x}$, $\bar{y}$,... des uples finis de variables, et par $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{m}$,... des uples finis d'éléments d'une structure. Si $\bar{x}$ est un uple de variables qui contient les variables d'un terme t ou les variables libres d'une formule φ, on note souvent $t(\bar{x})$ ou $\varphi(\bar{x})$ pour fixer une arité pour le terme t ou la formule φ. Si $\bar{m}$ est un uple de même longueur que $\bar{x}$, alors $t(\bar{m})$ désigne le terme t où chaque occurrence de $x_i \in \bar{x}$ a été remplacé par $m_i \in \bar{m}$, et $\varphi(\bar{m})$ désigne la formule φ où chaque occurrence libre de $x_i \in \bar{x}$ a été remplacé par $m_i \in \bar{m}$. On parle alors d'une terme ou d'une formule *avec paramètres.*

Définition 1.10 (Interprétation)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. L'*interprétation* $t^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) \in M$ d'un $\mathcal{L}$-terme $t(\bar{m})$ avec paramètres dans $\mathfrak{M}$ est donnée par la récurrence suivante :
- si $m \in M$ est un paramètre, alors $m^{\mathfrak{M}} = m$,
- si f est une fonction n-aire et $t_1(\bar{m}), \ldots, t_n(\bar{m})$ sont des $\mathcal{L}$-termes avec paramètres dans $\mathfrak{M}$, alors $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m}))$.

Définition 1.11 (Satisfaction)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. La *satisfaction* dans $\mathfrak{M}$ d'une formule $\varphi(\bar{m})$ avec paramètres dans $\mathfrak{M}$, notée $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$, est donnée par la récurrence suivante :
- $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)(\bar{m})$ ssi $(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) \in R^{\mathfrak{M}}$,
- $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{M} \not\models \varphi(\bar{m})$,
- $\mathfrak{M} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar{m})$ et $\mathfrak{M} \models \varphi_2(\bar{m})$,
- $\mathfrak{M} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar{m})$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi_2(\bar{m})$,
- $\mathfrak{M} \models \forall x\varphi\ (x, \bar{m})$ ssi pour tout $n \in M$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi(n, \bar{m})$,
- $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi\ (x, \bar{m})$ ssi il existe $n \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(n, \bar{m})$.

Si $\varphi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$, on dit également que $\varphi(\bar{m})$ est *vraie* dans $\mathfrak{M}$, que $\mathfrak{M}$ *satisfait* $\varphi(\bar{m})$ ou que $\bar{m}$ *satisfait* ou *réalise* $\varphi(\bar{x})$ dans $\mathfrak{M}$. Ce dernier est aussi noté $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \varphi(\bar{x})$.

C'est cette définition qui donne le sens usuel aux connecteurs booléens et aux quantificateurs.
Il arrive que deux formules signifient la même chose.

Définition 1.12. 1. Soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux formules. On dit que $\varphi(\bar{x})$ *implique* $\psi(\bar{x})$, ou que $\psi(\bar{x})$ *est conséquence* de $\varphi(\bar{x})$, si pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ alors $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m})$.
Les formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont *équivalentes*, noté $\varphi(\bar{x}) \equiv \psi(\bar{x})$, si $\varphi(\bar{x}) \models \psi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x}) \models \varphi(\bar{x})$.

2. Soient $\Phi(\bar{x})$ et $\Psi(\bar{x})$ deux ensembles de formules. On dit que $\Phi(\bar{x})$ *implique* $\Psi(\bar{x})$, ou que $\Psi(\bar{x})$ *est conséquence* de $\Phi(\bar{x})$, si pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ pour tout $\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ alors $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m})$ pour tout $\psi(\bar{x}) \in \Psi(\bar{x})$.
Les ensembles $\Phi(\bar{x})$ et $\Psi(\bar{x})$ sont *équivalentes*, noté $\Phi(\bar{x}) \equiv \Psi(\bar{x})$, si $\Phi(\bar{x}) \models \Psi(\bar{x})$ et $\Psi(\bar{x}) \models \Phi(\bar{x})$.

Exercice 1.13. Toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen $\vee$, ni le quanteur $\forall$.

On vérifie facilement que dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs formules, tout choix de parenthèses donne une formule équivalente. On supprimera donc en général les parenthèses superflues.
Par la suite, nous utiliserons les abréviations suivantes :
— $\varphi \to \psi$ pour $\neg\varphi \vee \psi$,
— $\varphi \leftrightarrow \psi$ pour $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Exercice 1.14. Deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement toute $\mathcal{L}$-structure satisfait $\forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 1.15. Toute formule est équivalente à une formule *prénexe*, c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\varphi$ où les Q_i sont des quanteurs et φ est une formule sans quanteur.

1.4 Modèles, théories et axiomes

Définition 1.16 (Modèle)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage et Φ un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est un *modèle* de Φ si $\mathfrak{M} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$. On dit que Φ est *consistant* si Φ a un modèle.

Remarque 1.17. Ceci est la définition *sémantique* de la consistance. La définition syntaxique demande que Φ ne permet pas d'en déduire une contradiction ; le *théorème de complétude* de Gödel dit que les deux sont équivalents.

Définition 1.18 (Théorie)**.** Soit $\mathcal{L}$ un langage. Une $\mathcal{L}$-*théorie* est un ensemble consistant de $\mathcal{L}$-énoncés clos par conséquence. Une théorie T est *complète* si pour tout $\mathcal{L}$-énoncé φ on a soit $\varphi \in T$ soit $\neg\varphi \in T$.
Un *système d'axiomes* pour une théorie T est un ensemble Φ de $\mathcal{L}$-énoncés tel que T est l'ensemble des conséquences de Φ.

En particulier un système d'axiomes pour une théorie T est une partie de T. Si T permet un système fini d'axiomes, T est *finiment axiomatisable.*

Exemple 1.19. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Alors l'ensemble $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ de tous les $\mathcal{L}$-énoncés vrais dans $\mathfrak{M}$ est une théorie complète.

Exercice 1.20. Deux théories complètes qui ont un modèle commun sont égales.

Exemple 1.21.

1. La $\mathcal{L}_{ord}$-théorie DLO^o des ordres denses sans extrémités est donnée par les axiomes suivants :
   — Ordre : $\forall x\,\forall y\,\forall z\,[(x<y\wedge y<z)\rightarrow x<z]$,
   $\forall x\,\forall y\,(x<y\vee x=y\vee y<x)$,
   $\forall x\,\neg x<x$.
   — Dense : $\forall x\,\forall y\,[x<y\rightarrow\exists z\,(x<z\wedge z<y)]$.
   — Sans extrémités : $\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y<x\wedge x<z)$.
   Ceci est une théorie complète finiment axiomatisable.
2. La $\mathcal{L}_{gp}$-théorie des groupes est donnée par les axiomes suivants :
   — Associativité : $\forall x\,\forall y\,\forall z\;(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(x\cdot z)$,
   — Élément neutre : $\forall x\;x\cdot 1=1\cdot x=x$,
   — Inverse : $\forall x\;x\cdots x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$.
   Ceci est une théorie incomplète finiment axiomatisable.
3. La $\mathcal{L}_{gp}$-théorie des groupes abéliens sans torsion est donnée par les axiomes suivants :
   — La théorie des groupes,
   — Commutativité : $\forall x\,\forall y\;x\cdot y=y\cdot x$.
   — Sans torsion : Pour tout $n\in\mathbb{N}^\times$ l'axiome $\forall x\;x^n\neq 1$, où x^n est une abréviation pour $\underbrace{x\cdots x}_{n}$.
   Ceci est une théorie complète récursivement axiomatisable (la liste infinie d'axiomes est donné par un schéma récursif).
4. La $\mathcal{L}_{ann}$-théorie ACF des corps algébriquement clos est donnée par les axiomes suivants :
   — $\langle M,+\rangle$ est un groupe abélien.
   — $\langle M\setminus\{0\},\cdot\rangle$ est un groupe abélien.
   — Distributivité : $\forall x\,\forall y\,\forall z\;x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.
   — Pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'axiome $\forall x_1\ldots\forall x_n\,\exists y\;y^n+x_1y^{n-1}+\cdots+x_n=0$.
   Ceci est une théorie incomplète récursivement axiomatisable. Ses complétions sont données en spécifiant la caractéristique, soit en caractéristique $p>0$ par un seul axiome $\underbrace{1+\cdots+1}_{p}=0$, soit en caractéristique 0 par un schéma d'axiomes $\underbrace{1+\cdots+1}_{n}\neq 0$ pour tout $n>0$.
5. La théorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N},0,+,\cdot)$ de l'arithmétique. D'après le théorème d'incomplétude de Gödel, elle n'est pas récursivement axiomatisable.

1.5 Élémentaire, mon cher Watson !

Définition 1.22 (Équivalence élémentaire). Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont *élémentairement équivalentes* (noté $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$) si elles satisfont les mêmes énoncés.

Ainsi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ ssi $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

Exemple 1.23.

1. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$, deux modèles de DLO^o.
2. $\langle \mathbb{Q}, + \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, + \rangle$, deux modèles de la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion.
3. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}, + \rangle$ car $\forall x \exists y\ x = y + y$ est satisfaite dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.24. Une théorie est complète si ses modèles sont tous élémentairement équivalents.

Définition 1.25 (Plongement). Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Une application $\sigma : M \to N$ est un *plongement* $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ si
— pour tout symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$ d'arité n et $\bar{m} \in M^n$ on a $\sigma(f^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$, et
— pour tout symbole de relation $R \in \mathcal{L}$ d'arité n et $\bar{m} \in M^n$ on a $\bar{m} \in R^{\mathfrak{M}}$ ssi $\sigma(\bar{m}) \in R^{\mathfrak{N}}$.
Un *isomorphisme* est un plongement surjectif. Un *automorphisme* de $\mathfrak{M}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ vers $\mathfrak{M}$.
Un plongement $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est *élémentaire* si pour tout $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{x})$ et tout $\bar{m}$ dans M on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$.

Puisque l'égalité fait partie des relations, un plongement est toujours injectif. La proposition suivante montre en particulier qu'un isomorphisme est toujours élémentaire.

Proposition 1.26. *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures.*

1. *Si σ est un plongement de $\mathfrak{M}$ vers $\mathfrak{N}$ alors pour toute formule sans quanteurs $\varphi(\bar{m})$ avec paramètres $\bar{m}$ dans M on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$.*
2. *Si σ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$ alors pour toute formule $\varphi(x_1, ..., x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, ..., m_k) \in M^k$, $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$.*

Démonstration.

1. Par récurrence sur les termes on montre facilement que pour tout terme $t(\bar{m})$ avec paramètres on a $\sigma(t^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = t^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$. Ensuite l'énoncé est vrai pour les formules atomiques par définition d'un plongement ; il est clairement préservé par combinaison booléenne.
2. D'après la première partie l'énoncé est vrai pour les formules sans quanteurs, et préservé par les combinaisons booléennes. Soit donc $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$. Alors il y a $n \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(n, \bar{m})$; par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(n), \sigma(\bar{m}))$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$. Réciproquement, si $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$ il y a $n' \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(n', \sigma(\bar{m}))$. Comme σ est surjectif il y a $n \in M$ avec $\sigma(n) = n'$. Par

hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models \varphi(n, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi(x, \bar{m})$. La démonstration pour un quanteur universel est analogue (ou bien on utilise que $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$). □

Exercice 1.27. Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure finie et $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ alors $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

Définition 1.28 (Sous-structure)**.** Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une partie $A \subseteq M$ est une *sous-structure* de $\mathfrak{M}$ si A est clos par les fonctions dans $\mathcal{L}$. Dans ce cas on munit A d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{A}$ en posant $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{M}} \restriction_A$ pour tout symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$, et $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{M}} \cap A^{n_R}$ pour tout symbole de relation $R \in \mathcal{L}$. Si $\mathfrak{A}$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$, on note $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$.
Une sous-structure $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ est *élémentaire* si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{a})$ avec paramètres $\bar{a}$ dans A on a $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ ssi $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$. Dans ce cas on dit que $\mathfrak{M}$ est une *extension élémentaire* de $\mathfrak{A}$, et on note $A \preccurlyeq \mathfrak{M}$.

On note que si $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ alors $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Remarque 1.29.

1. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et A une partie de M. Il existe une plus petite sous-structure de $\mathfrak{M}$ contenant A, la sous-structure engendrée par A, qui est la clôture de A par les fonctions de $\mathcal{L}$.
2. La notion de sous-structure dépend du langage choisi. Par exemple, $\mathbb{N}$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ mais pas de $\langle \mathbb{Z}, 0, +, - \rangle$.

Notation. Pour une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et un ensemble A de paramètres dans M, on peut former le langage $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{a : a \in A\}$ où l'on rajoute les éléments de A comme nouvelles constantes, et considérer l'*expansion* $\mathfrak{M}_A$ de $\mathfrak{M}$ en une $\mathcal{L}_A$-structure en interprétant $a^{\mathfrak{M}_A} = a$ pour $a \in A$. On note $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ la $\mathcal{L}_A$-théorie de $\mathfrak{M}_A$, qui correspond donc à l'ensemble des énoncés à paramètres dans A qui sont vrais dans $\mathfrak{M}$.

On appelle $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$ le *diagramme élémentaire* de $\mathfrak{M}$.

Exercice 1.30. Soit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$,
2. $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, M)$,
3. l'inclusion $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ est un plongement élémentaire.

Exercice 1.31. Soit K un corps.

1. Remarquer que toute $\mathcal{L}_{ann}$-sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage telle que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f \rangle$ soit un corps.

Exercice 1.32. Donner un exemple de structures $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ tel que

1. $\mathfrak{M}$ n'est pas élémentairement équivalente à $\mathfrak{N}$.
2. $\mathfrak{M}$ est élémentairement équivalente à $\mathfrak{N}$, mais n'en est pas une sous-structure élémentaire.

Exercice 1.33. Soient $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_3$.
- Si $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ alors $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$.
- Si $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ et $\mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ alors $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$.
- Trouver un exemple tel que $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ mais $\mathfrak{M}_2 \not\preccurlyeq \mathfrak{M}_3$.

Exercice 1.34. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\mathcal{L}$-structures (i.e. $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$ pour tout $i < j$).

1. Montrer que $\bigcup_{i\in I} M_i$ est canoniquement doté d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$ pour tout $i \in I$.
2. Montrer que si la chaîne est élémentaire (i.e. $\mathfrak{M}_i \preccurlyeq \mathfrak{M}_j$ pour tout $i < j$), alors $\mathfrak{M}_i \preccurlyeq \mathfrak{M}$ pour tout $i \in I$.

Voici un critère utile pour vérifier qu'une sous-structure est élémentaire. Ce critère n'utilise que la satisfaction dans la grande structure :

Proposition 1.35 (Test de Tarski)**.** *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et $A \subseteq M$. Alors la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{A}$ induite sur A en fait une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$ ssi pour toute formule $\varphi(x, \bar{a})$ avec paramètres dans A, si $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$ alors il existe $b \in A$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(b, \bar{a})$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$, alors $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$ et on trouve bien $b \in A$ tel que $\mathfrak{A} \models \varphi(b, \bar{a})$. Alors $\mathfrak{M} \models \varphi(b, \bar{a})$.
Réciproquement supposons que $A \subseteq M$ satisfont le critère de Tarski. On note d''abord que A est clos par fonctions : si $f \in \mathcal{L}$ est une fonction et $\bar{a}$ dans A, alors $\mathfrak{M} \models \exists x\, x = f(\bar{a})$, et donc on trouve $b \in A$ avec $b = f(\bar{a})$. Ainsi on peut bien parler de la structure $\mathfrak{A}$ induite sur A par $\mathfrak{M}$.
On montre par récurrence sur les formules que $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ ssi $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$, pour toute formule $\varphi(\bar{a})$ avec paramètres dans A. C'est vrai pour les formules sans quanteurs car $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$; de plus la propriété est préservée par combinaison booléenne. Soit donc $\varphi(x, \bar{a})$ une $\mathcal{L}$-formule avec paramètres dans A telle que $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$. Par le critère de Tarski il existe $b \in A$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(b, \bar{a})$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{A} \models \varphi(b, \bar{a})$d'où $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$. Réciproquement, si $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$, alors il existe $b \in A$ tel que $\mathfrak{A} \models \varphi(b, \bar{a})$; par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models \varphi(b, \bar{a})$ et donc $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi(x, \bar{a})$. □

Corollaire 1.36 (Théorème de Löwenheim-Skolem Descendant)**.** Soient $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie, A un ensemble de paramètres dans N, et κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathfrak{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ contenant A et de cardinal κ.

Démonstration. On peut supposer que $|A| = \kappa$. On fixe $a \in A$, et pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x, \bar{y})$ on choisit une fonction $f_\varphi : N^{|\bar{y}|} \to N$ telle que si $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$ alors $\mathfrak{N} \models \varphi(f_\varphi(\bar{m}), \bar{m})$ pour tout $\mathfrak{M}$ dans N (et $f_\varphi(\bar{m}) = a$ sinon). Soit M la clôture de A par toutes les fonctions de $\mathcal{L}$ et par toutes les fonctions f_φ pour toutes les $\mathcal{L}$-formules avec au moins une variable libre. Alors la structure induite $\mathfrak{M}$ en fait une sous-structure de $\mathfrak{N}$, qui est élémentaire par le test de Tarski. □

Exercice 1.37. Montrer qu'il existe un modèle dénombrable de ZFC (en supposant que ZFC est consistant). Pourquoi est-ce que cela ne contredit pas le théorème de Cantor que $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ pour tout X ?

La théorie des modèles permet bien de faire du modélisme !

1.6 Le va-et-vient

Le va-et-vient est une méthode utile pour montrer que deux structures sont élémentairement équivalentes, voire même isomorphes dans le cas dénombrable.

Définition 1.38 (Isomorphisme partiel)**.** Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Un *isomorphisme partiel* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un isomorphisme σ d'une sous-structure $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ sur une sous-structure $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}$. Il est *élémentaire* si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{a})$ avec paramètres dans A on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$ ssi $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{a}))$.

Ainsi l'adjectif *élémentaire* fait référence à la satisfaction dans $\mathfrak{M}$ et dans $\mathfrak{N}$. Comme tout isomorphisme, σ préserve la satisfaction par rapport à $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

Définition 1.39 (Va-et-vient)**.** Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Une famille non vide $\mathcal{F}$ d'isomorphismes partiels de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un (*système de*) *va-et-vient* entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ si pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$,
- — pour tout $m \in M$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $m \in \mathrm{Dom}(\tau)$ (le *va*),
- — pour tout $n \in N$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $n \in \mathrm{Im}(\tau)$ (le *vient*).

Deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ∞-*équivalentes* s'il existe un va-et-vient entre elles.

Exemple 1.40. Deux ordres totaux denses sans extrémité sont ∞-équivalents : On voit facilement que la famille d'isomorphismes partiels entre parties finies forme un va-et-vient.

Exemple 1.41. Deux corps algébriquement clos K_1 et K_2 de même caractéristique et de degré de transcendance infini sont ∞-équivalents.
Soit $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes entre des sous-corps finiment engendrés respectivement de K_1 et K_2. Comme K_1 et K_2 ont même caractéristique, $\mathcal{F}$ est non vide car leurs corps premiers sont isomorphes.
Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ un isomorphisme de k_1 sur k_2, et soit $a \in K_1$. Si a est algébrique sur k_1, et $P \in k_1[X]$ est son polynôme minimal, alors $\sigma(P)$ est un polynôme irréductible de $k_2[X]$ qui a une racine b dans K_2, qui est algébriquement clos. On peut donc envoyer a sur b pour prolonger σ en un isomorphisme $\tau : k_1(a) \to k_2(b)$. Sinon a est transcendant sur k_1. Comme k_2 est finiment engendré et K_2 est de degré de transcendance infini, il existe $b \in K_2$ transcendant sur k_2. Même conclusion que dans le cas précédent.

Exercice 1.42. Soit K un corps. On considère $\mathcal{L}_K = \{0, +, \lambda_k : k \in K\}$ le langage des K-espaces vectoriels, les λ_k étant des fonctions unaires (les fonctions scalaires). Soient E et F deux K-espaces vectoriels vus comme $\mathcal{L}_K$-structures. Montrer que si E et F sont de dimension infinie alors ils sont ∞-équivalents.

Exercice 1.43. Donner un exemple de deux ordres totaux discrets infinis qui ne sont pas ∞-équivalents.

Exercice 1.44. Montrer que la relation d'∞-équivalence est bien une relation d'équivalence.

Proposition 1.45. *Deux structures dénombrables ∞-équivalentes sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un va-et-vient entre deux structures dénombrables $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. On choisit une énumération $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de M et une énumération $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de N. En commençant avec n'importe quel $\sigma_0 \in \mathcal{F}$ on trouve inductivement une suite croissante $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ d'isomorphismes partiels dans $\mathcal{F}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$m_i \in \mathrm{Dom}(\sigma_{2i+1}) \quad \text{et} \quad n_i \in \mathrm{Im}(\sigma_{2i+2}).$$

Alors $\sigma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i$ est l'isomorphisme recherché. $\square$

La méthode de va-et-vient sera souvent utilisée pour montrer que deux structures sont élémentairement équivalentes :

Proposition 1.46. *Un va-et-vient consiste d'isomorphismes partiels élémentaires. En particulier, si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ∞-équivalentes, alors $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur les formules que pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$ et toute $\mathcal{L}$-formules $\varphi(\bar{m})$ avec paramètres dans $\mathrm{Dom}(\sigma)$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$.
Pour une formule atomique, on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ ssi $\mathrm{Dom}(\sigma) \models \varphi(\bar{m})$ ssi $\mathrm{Im}(\sigma) \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$ ssi $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$. La propriété étant préservée par combinaisons booléennes, considérons une formule existentielle. Si $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, il y a $a \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(a, \bar{m})$. Soit τ une prolongation de σ avec $a \in \mathrm{Dom}(\tau)$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(\tau(a), \tau(\bar{m})$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \tau(\bar{m}))$, et donc $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$. L'autre direction est par symétrie. $\square$

Exercice 1.47. Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémité sont élémentairement équivalents. En particulier $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$. En déduire que DLO^o est complet.

Exercice 1.48. Déduire de l'exemple 1.41 que la théorie ACF_p des corps algébriquement clos de caractéristique p (premier ou 0) est complète.

Chapitre 2

La compacité

2.1 Ultraproduits

Définition 2.1 (Filtres et ultrafiltres)**.** Soit I un ensemble. Un ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de I est un *filtre* sur I si :
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- si $X, Y \in \mathcal{F}$ alors $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
- si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subseteq Y \subseteq I$ alors $Y \in \mathcal{F}$.

Un filtre $\mathcal{F}$ est un *ultrafiltre* si pour toute partie A de I, soit A soit $I \setminus A$ est dans $\mathcal{F}$. Un ultrafiltre $\mathcal{F}$ est *principal* s'il y a $a \in I$ tel que $\mathcal{F} = \{A : a \in A\}$.

Exemple 2.2. Si I est infini, alors l'ensemble des parties co-finies de I forme un filtre, le *filtre de Fréchet.*

Exercice 2.3.
1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre ssi $\mathcal{F}$ est maximal pour l'inclusion.
2. Montrer que si I est fini, tout ultrafiltre sur I est principal.
3. Montrer qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est non-principal ss'il contient le filtre de Fréchet.
4. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre et $X \subseteq I$ avec $X \notin \mathcal{U}$. Montrer que $\mathcal{U}_X = \{Y \setminus X : Y \in \mathcal{U}\}$ est un ultrafiltre sur $I \setminus X$.

À l'aide du lemme de Zorn, tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

Définition 2.4 (Ultraproduit)**.** Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures non-vides et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. L'*ultraproduit* $\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$, aussi noté $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$, est la structure $\mathfrak{M}$ suivante :
1. le domaine de $\mathfrak{M}$ est le produit $\prod_{i\in I} M_i$ modulo la relation d'équivalence
$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \text{ si et seulement si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$
On notera $[a_i]_I$ la classe modulo $\mathcal{U}$ de l'uple $(a_i)_{i\in I}$, et $[\bar{a}_i]_I = ([a_i^1]_I, \ldots, [a_i^n]_I)$.
2. pour toute fonction f de $\mathcal{L}$, on pose $f^{\mathfrak{M}}([\bar{a}_i]_I) = [f^{\mathfrak{M}_i}(\bar{a}_i)]_I$.

3. pour toute relation R de $\mathcal{L}$, on pose

$$R^{\mathfrak{M}} := \{([\bar{a}_i]_I)_I) \in M^{n_R} : \{i \in I : \bar{a}_i \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Remarque 2.5. Si on permet des structures vides, alors soit $X = \{i \in I : M_i = \emptyset\} \in \mathcal{U}$ et alors $M = \emptyset$, soit enlève ces indices et on considère l'ultraproduit $\prod_{\mathcal{U}_X} \mathfrak{M}_i$.

Exercice 2.6. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence, et que les fonctions et relations sont bien définies, c'est-à-dire qu'elle ne dépendent pas du choix des représentants. Noter de plus que la définition de $=^{\mathfrak{M}}$ correspond à la vraie égalité sur M.

Exercice 2.7. Que peut-on dire de l'ultraproduit si l'ultrafiltre est principal ?

Théorème 2.8 (Critère de Łos)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Si $\varphi([\bar{m}_i]_I)$ est une $\mathcal{L}$-formule avec paramètres dans l'ultraproduit $\mathfrak{M} := \prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$, alors*

$$\mathfrak{M} \models \varphi([\bar{m}_i]_I) \text{ si et seulement si } \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(\bar{m}_i)\} \in \mathcal{U}.$$

En particulier, si θ est un énoncé alors $\mathfrak{M} \models \theta$ ssi il existe $X \in \mathcal{U}$ tel que $\mathfrak{M}_i \models \theta$ pour tout $i \in X$. Si T est une théorie telle que $\mathfrak{M}_i \models T$ pour tout $i \in I$, alors $\mathfrak{M} \models T$.

Démonstration. On vérifie par récurrence sur les termes que pour tout $\mathcal{L}$-terme $t(\bar{x})$ on a

$$t^{\mathfrak{M}}([\bar{m}_i]_I) = [t^{\mathfrak{M}_i}(\bar{m}_i)]_I.$$

Ensuite, on montre le critère de Łos par récurrence sur les formules. Par définition de l'ultraproduit et par ce qui précède le critère est évident pour les formules atomiques. Supposons le critère vérifié pour deux formules φ et ψ (avec paramètres qu'on supprime). Alors $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$ ssi $\mathfrak{M} \models \varphi$ et $\mathfrak{M} \models \psi$ ssi

$$X := \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad Y := \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi\} \in \mathcal{U}$$

ssi $X \cap Y \in \mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est un filtre. Or, $X \cap Y = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models (\varphi \wedge \psi)\}$, ce qui montre le critère pour $(\varphi \wedge \psi)$. Le cas d'une disjonction est analogue.
Quant à la négation, $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$ ssi $X \notin \mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre (c'est ici qu'un simple filtre ne suffit pas), $X \notin \mathcal{U}$ ssi $I \setminus X \in \mathcal{U}$. Or, $I \setminus X = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \neg\varphi\}$, et le critère est également vérifié pour $\neg\varphi$.
Enfin, si $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, [\bar{m}_i]_I)$, soit $[n_i]_I \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi([n_i]_I, [\bar{m}_i]_I)$. Alors

$$Y = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(n_i, \bar{m}_i)\} \in \mathcal{U}.$$

Or, $X = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \exists x \varphi(x, \bar{m}_i)\} \supseteq Y$, et $X \in \mathcal{U}$. Réciproquement, si $X \in \mathcal{U}$, choisissons pour tout $i \in X$ un $n_i \in M_i$ tel que $\mathfrak{M}_i \models \varphi(n_i, \bar{m}_i)$ (et choisissons $n_i \in M_i$ arbitraire pour $i \notin X$. Alors

$$X = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(n_i \bar{m}_i)\} \in \mathcal{U},$$

et par hypothèse $\mathfrak{M} \models \varphi([n_i]_I, [\bar{m}_i]_I)$, d'où $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, [\bar{m}_i]_I)$. Le critère est alors vérifié pour la formule $\exists x \varphi(x, [\bar{m}_i]_I)$. □

Exercice 2.9. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Montrer que l'application diagonale $m \mapsto [m]_I$ est un plongement élémentaire de $\mathfrak{M}$ dans l'*ultrapuissance* $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}$, aussi notée $\mathfrak{M}^{\mathcal{U}}$.

2.2 Le théorème de compacité

Théorème 2.10 (Compacité)**.** *Soit Σ un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle. Alors Σ a un modèle.*

Démonstration. Considérons Σ un ensemble d'énoncés finiment consistant. Pour toute partie finie i de Σ soit $\mathfrak{M}_i$ un modèle de i. Nous allons utiliser le critère de Łos pour montrer qu'un ultraproduit des $\mathfrak{M}_i$ est modèle de Σ.
Soit I l'ensemble des parties finies de Σ, et pour tout $i \in I$ soit $I_i := \{j \in I : i \subseteq j\}$. Alors $\mathcal{F} := \{X \subseteq I : I_i \subseteq X \text{ pour un } i \in I\}$ est un filtre sur I. En effet : $I_\emptyset = I \in \mathcal{F}$; $\emptyset \notin \mathcal{F}$; si $I_i \subseteq X$ et $I_j \subseteq Y$ alors $I_{i \cup j} \subseteq X \cap Y \in \mathcal{F}$; si $I_i \subseteq X \subseteq Y$ alors $I_i \subseteq Y \in \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{M} = \prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$. Alors $\mathfrak{M}$ est un modèle de Σ : si $\theta \in \Sigma$ alors $\mathfrak{M}_i \models \theta$ pour tout $i \in I_{\{\theta\}} \in \mathcal{U}$, donc $\mathfrak{M} \models \theta$ par le critère de Łos. □

Exercice 2.11. Montrer que le théorème de compacité est équivalent à l'énoncé suivant : soient Σ un ensemble d'énoncés et φ une conséquence de Σ. Alors φ est conséquence d'une partie finie de Σ.

Exercice 2.12. A l'aide du théorème de compacité vérifier les assertions suivantes :

1. Une théorie qui, pour tout entier n, a un modèle de cardinalité plus grand que n, a un modèle infini.
2. Il n'existe pas de théorie dans la langage $\mathcal{L}_{ord}$ dont les modèles sont précisément les ordres finis.
3. Il n'existe pas de théorie dans la langage $\mathcal{L}_{ann}$ dont les modèles sont précisément les corps finis.

Le théorème de compacité s'exprime topologiquement de la façon suivante : nous munissons l'ensemble $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage $\mathcal{L}$ d'une topologie. A tout énoncé φ, on associe l'ensemble $[\varphi]$ des théories complètes contenant φ. Alors les $[\varphi]$ forment une base d'ouverts pour une topologie, car si φ_1 et φ_2 sont deux énoncés, $[\varphi_1] \cap [\varphi_2] = [\varphi_1 \wedge \varphi_2]$. Muni de cette topologie, $\mathcal{T}$ est un espace séparé : si T_1 et T_2 sont deux théories complètes distinctes alors il existe un énoncé $\varphi \in T_1$ tel que $\varphi \notin T_2$. Donc $[\varphi]$ et $[\neg\varphi]$ sont des voisinages disjoints respectivement de T_1 et T_2. Cet espace $\mathcal{T}$ est de plus totalement discontinu, c'est-à-dire il admet une base d'ouverts qui sont fermés : le complémentaire de $[\varphi]$ est $[\neg\varphi]$. Par conséquent, toute partie connexe de $\mathcal{T}$ est soit vide, soit réduite à un point.

Exercice 2.13. Montrer que le théorème de compacité est équivalent à la compacité de cet espace $\mathcal{T}$.

Exercice 2.14. Les ouverts-fermés de $\mathcal{T}$ sont les parties de la forme $[\varphi]$ pour φ un énoncé de $\mathcal{T}$.

Voici quelques applications du théorème de compacité.

Corollaire 2.15. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\varphi_i(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$ formule avec paramètres dans M pour tout $i \in I$. Si pour tout $I_0 \subseteq I$ fini les formules $\{\varphi_i(\bar{x}) : i \in I_0\}$ ont une réalisation commune dans M, alors il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ et $\bar{a}$ dans N tel que $\mathfrak{N} \models \varphi_i(\bar{a})$ pour tout $i \in I$.

Démonstration. Soit $\bar{c}$ un n-uple de nouvelle constantes, et $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{m : m \in M\} \cup \{\bar{c}\}$. Considérons l'ensemble de $\mathcal{L}'$-énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{\varphi_i(\bar{c}) : i \in I\}$$

Par hypothèse, pour toute partie finie Σ_0 de Σ, il existe $\bar{a}_{\Sigma_0}$ dans M tel que $\mathfrak{M} \models \Sigma_0$, où $\bar{c}$ est interprété par $\bar{a}_{\Sigma_0}$. Par compacité Σ est consistant et a un modèle $\mathfrak{N}$. Alors $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ (en identifiant les constantes $m \in M$ avec leur interprétation $m^{\mathfrak{N}}$ dans $\mathfrak{N}$), et si $\bar{a} = \bar{c}^{\mathfrak{N}} \in N^{|\bar{a}|}$ alors $\mathfrak{N} \models \varphi_i(\bar{a})$ pour tout $i \in I$. □

Exemple 2.16.

1. *Les entiers non-standards* : il existe une extension élémentaire de la structure $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ contenant un entier (non-standard) non nul qui est divisible par tous les entiers standards non nuls (les entiers de $\mathbb{N}^*$).
2. *Les réels non-standards* : il existe une extension élémentaire $\mathbb{R}'$ de la structure $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, < \rangle$ contenant un réel c (non-standard) strictement positif qui est *infiniment petit*, c'est-à-dire tel que $0 < c < \frac{1}{n}$ pour tout entier (standard) $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors pour tout $r' \in \mathbb{R}'$ *borné* (tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $-n < r' < n$), il existe un unique réel standard $r \in \mathbb{R}$ *infiniment proche* de r', i.e. $|r - r'|$ est infiniment petit. On appelle r la *partie standard* de r'.

Proposition 2.17 (Théorème de l'extension élémentaire commune)**.** *Toute famille $(\mathfrak{M}_i : i \in I)$ de $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes a une extension élémentaire «commune» : il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{N}$ telle que tous les $\mathfrak{M}_i$ se plongent élémentairement dans $\mathfrak{N}$.*

Démonstration. On peut supposer que les domaines des $(M_i : i \in I)$ sont disjoints. Considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \bigcup_{i \in I} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i, M_i)$$

dans le langage $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \bigcup_{i \in I} M_i$. Remarquons que si $\mathfrak{N}$ est un modèle de Σ, alors l'application $M_i \ni m \mapsto m^{\mathfrak{N}}$ est un plongement élémentaire de $\mathfrak{M}_i$ dans $\mathfrak{N}$. Par compacité, il est donc suffisant de montrer que tout fragment fini Σ_0 de Σ est consistant. Soit $\varphi_i(\bar{m}_i)$ la conjonction des formules de $\Sigma_0 \cap \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i, M_i)$. Alors $\mathfrak{M}_i \models \exists \bar{x} \varphi_i(\bar{x})$ pour tout i ; comme $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_i$ sont élémentairement équivalentes, on a aussi $\mathfrak{M}_1 \models \exists \bar{x} \varphi_i(\bar{x})$. Ainsi

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k \, (\varphi_{i_1}(\bar{x}_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(\bar{x}_k),$$

et on trouve $\bar{m}'_1, \ldots, \bar{m}'_k$ dans M_1 tel que

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi_{i_1}(\bar{m}'_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(\bar{m}'_k).$$

Ainsi M_1 est un modèle de Σ_0 eEn interprétant $\bar{m}_{i_j}$ par $\bar{m}'_j$ pour $j \leq k$. □

2.3 Théorème de Löwenheim-Skolem, Catégoricité

Théorème 2.18 (Löwenheim-Skolem ascendant)**.** *Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure infinie alors pour tout cardinal $\kappa \geq \max\{|L|, |M|\}$ il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ de cardinal κ.*

Démonstration. Soient $(c_i)_{i\in\kappa}$ des nouveaux symboles de constantes et considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Chaque fragment fini de Σ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qui peuvent être interprétés par des éléments distincts de $\mathfrak{M}$ car $\mathfrak{M}$ est infini. Donc Σ est finiment consistant a un modèle $\mathfrak{N}'$ par compacité, qui est donc une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Par Löwenheim-Skolem descendant il existe une sous-structure élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{N}'$ contenant M et de cardinal κ, qui est alors une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$. □

Convention. Le cardinal d'une théorie T dans un langage $\mathcal{L}$, notée $|T|$ est par convention le cardinal de l'ensemble des formules du langage $\mathcal{L}$, c'est-à-dire $|T| := \max\{\aleph_0, |L|\}$. En particulier on dit que T est dénombrable si $|L| \leq \aleph_0$.

Théorème 2.19 (Théorème de Löwenheim-Skolem)**.** *Si T est une théorie qui a un modèle infini alors T a un modèle de cardinal κ pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$.*

Démonstration. Par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant. □

Définition. Une théorie T est *κ-catégorique* si T a un unique modèle de cardinal κ à isomorphisme près. Une théorie est *totalement catégorique* si T est κ-catégorique pour tout κ infini.

Proposition 2.20. *Une théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ-catégorique pour un cardinal $\kappa \geq |T|$ est complète.*

Démonstration. Soit M le modèle de T de cardinal κ. Toujours par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, tout modèle de T est élémentairement équivalent à un modèle de cardinal κ, donc à M. □

Exemple 2.21. — La théorie des ensembles infinis est totalement catégorique.

- La théorie DLO^o est $\aleph_0$-catégorique, mais pas κ-catégorique pour tout cardinal $\kappa > \aleph_0$. Considérons par exemple un ordre $\kappa \times \mathbb{Q}$ et $(\kappa + 1) \times \mathbb{Q}$ avec ordre lexicographique. Il ne sont pas isomorphes, car dans le premier chaque segment final non-vide est de cardinal κ, mais dans le second il y a un segment final isomorphe à $\mathbb{Q}$.
- La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable, car deux tels corps sont caractérisés par leur degré de transcendance, qui est égal à leur cardinal si celui est non-dénombrable. Par contre cette théorie n'est pas $\aleph_0$-catégorique, car pour un corps

dénombrable algébriquement clos le dregré de transcendance peut prendre tout valeur dans $\omega + 1$. Il y a donc $\aleph_0$ modèles dénombrables non-isomorphes.

— La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet tout groupe abélien divisible sans torsion peut être regardé comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, qui est caractérisé par sa dimension, et donc par son cardinal si celui est non-dénombrable. Il y a $\aleph_0$ modèles dénombrables non-isomorphes, de dimension entre 1 et ω inclus.

— La théorie des groupes abéliens d'exposant p premier est totalement catégorique. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ qui est de même cardinal infini que sa dimension.

Exercice 2.22. Déterminer les cardinaux κ pour lesquels la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies est κ-catégorique. Même question pour la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.

Exercice 2.23. Soit $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage $\mathcal{L}$ qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
2. Montrer que T est complète.

Pour terminer cette partie nous allons énoncer le théorème de Morley qui est le point de départ de la théorie de la stabilité. La démonstration de ce théorème ne sera pas faite dans ce cours.

Fait 2.1 (Théorème de Morley 1965)**.** *Une théorie dénombrable qui est catégorique en un cardinal infini non-dénombrable est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable.*

2.4 Applications en algèbre

Puisque la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique donnée est complète, tous les coprs algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents. Le théorème suivant nous permet de changer de caractéristique.

Théorème 2.24 (Principe de Transfert)**.** *Soit φ un énoncé dans le langage des anneaux. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle ;*
2. *φ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.*
3. *φ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour une infinité de nombres p premier.*

Démonstration. Soi $\mathcal{P}$ l'ensembles des nombres premiers, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathcal{P}$. Pour $p \in \mathcal{P}$ soit K_p un corps algébriquement clos de caractéristique p. Comme tout K_p satisfait la théorie ACF, l'ultraproduit $K = \prod_{\mathcal{P}} K_p/\mathcal{U}$ aussi. En plus, pour tout $n > 0$ presque tout K_p satisfait l'énoncé $n = 1 + \cdots + 1 \neq 0$. Donc K est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.
Soit $I \subseteq \mathcal{P}$ un ensemble infini tel qu'il y ait un corps K_p algébriquement clos de caractéristique p satisfaisant φ. On considère un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant I. Par le critère de Łos φ est satisfaite dans K, et donc dans tout corps algébriquement clos de caractéristique zéro, puisque ACF_0 est complète. Il est donc impossible que $\neg\varphi$ puisse être vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinite de p différents, car sinon tout corps algébriquement clos de caractéristique zéro satisfaisait à la fois φ et $\neg\varphi$. □

Nous allons en déduire un théorème d'Ax.

Théorème 2.25 (Ax 1969 [1])**.** *Soit K un corps algébriquement clos, et f une application rationnelle par morceaux de K^m dans K^m pour $m > 0$. Si f est injective alors f est surjective.*

Démonstration. Supposons que $f = f(\bar{x}, \bar{a})$ utilise des paramètres $\bar{a}$. Supposons d'abord que $K = \tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^{n!}}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et $f(\bar{x}, \bar{a})$ définit une fonction injective de K^m dans K^m. Alors $\bar{a}$ est dans $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ pour n suffisamment grand et la restriction de $f(\bar{x}, \bar{a})$ définit une fonction injective de $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ dans $\mathbb{F}_{p^{n!}}$, qui est donc surjective. Ainsi $f(\bar{x}, \bar{a})$ est surjective sur K^m, et K satisfait l'énoncé

$$\forall \bar{y}\, [\forall \bar{x} \forall \bar{x}'\, (f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}', \bar{y}) \to \bar{x} = \bar{x}') \to \forall \bar{z} \exists \bar{x}\, f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}].$$

Cet énoncé est donc vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique positive, et par transfert également dans tout corps algébriquement clos de caractéristique zéro. □

1. Ax a en fait montré plus généralement que tout endomorphisme injectif d'une variété algébrique est surjective.

Chapitre 3

Types et élimination des quanteurs

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de types, notion centrale en théorie des modèles pour l'étude des structures, et verrons leur utilisation pour l'élimination des quanteurs.

3.1 Ensembles définissables

Nous commençons par l'étude des parties définies par des formules dans une structure.

Définition 3.1. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une partie D de M^n est un *ensemble définissable* dans $\mathfrak{M}$ s'il existe une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ et des paramètres $\bar{b}$ dans M tels que

$$D = \{\bar{a} \in M^n : \ \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

On note $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$ la famille des ensembles définissables de $\mathfrak{M}$.

Remarque 3.2. Étant donné D, ni la formule φ ni l'ensemble $\bar{b}$ sont forcément uniques. Si $B \subseteq M$ on dit que D est définissable avec des paramètres dans B, ou B-définissable, si on peut choisir une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ définissant D avec $\bar{b} \subseteq B$. On dit que D est définissable *atomique*, *sans quanteur*, *existentiel* etc. s'il y a une telle formule qui définit D.
Si $\mathfrak{N}$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ et $D \subseteq M^n$ est un ensemble définissable dans $\mathfrak{M}$, alors D a une extension canonique en un ensemble $D' \subseteq N^n$ définissable dans $\mathfrak{N}$, tel que $D' \cap M^n = D$: si D est défini par une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ ($\bar{b} \subseteq M$) alors $D' := \{\bar{a} \in N^n : \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$. En pratique on confondra D' avec D.

Exercice 3.3. Vérifier que D' ne dépend pas du choix de φ pour D.

Exercice 3.4. Soit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Montrer que $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute partie non vide définissable $D \subseteq N$ à paramètres dans M on a $D \cap M \neq \emptyset$.

Exemple 3.5. Dans un groupe $\langle G, 1, \cdot, ^{-1} \rangle$, le centre C de G est défini par $\varphi(x) := \forall y \ xy = yx$. Soit $\psi(x, y) := (xy = yx)$. Pour tout $a \in G$, le centralisateur $C_G(a)$ de a dans G est défini par $\psi(x, a)$.

Exercice 3.6. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 3.7. Montrer que l'ordre sur $\mathbb{R}$ est définissable sans paramètre dans la structure $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$.

Exercice 3.8. La famille $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$ est close par

1. combinaisons booléennes finies : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M})$, le complémentaire de A, l'union et l'intersection de A et B sont dans $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$,
2. produits cartésiens : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M})$, $A \times B \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M})$,
3. projections : si A est une partie définissable de M^{n+m} alors la projection de A sur M^n est définissable,
4. spécialisations : si A est une partie définissable de M^{n+m} et si $\bar{b} \in M^m$ alors
$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n : \ (\bar{a}, \bar{b}) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M}),$$
5. permutations des coordonnées : si A est une partie définissable de M^n et σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ alors
$$\sigma(A) := \{(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)} : \ (a_1, \ldots, a_n) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M}).$$

La famille $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$ est en fait la plus petite famille de parties de $\bigcup_{n>0} M^n$, contenant les ensembles définissables atomiques et étant close par combinaisons booléennes finies, produits cartésiens et projections.

3.2 Types

Définition 3.9. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $\bar{a}$ un uple de M. Le *type* de $\bar{a}$ sur A (dans $\mathfrak{M}$) est l'ensemble des $\mathcal{L}(A)$-formules satisfaites par $\bar{a}$, c'est-à-dire l'ensemble
$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \{\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}(A) : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})\}.$$

En général on omet le modèle ambiant $\mathfrak{M}$ sauf quand il y a ambiguïté.
Plus généralement, un *n-type partiel sur A* est un ensemble de $\mathcal{L}(A)$-formules en n variables libres $\bar{x}$ telle que toute partie finie ait une réalisation dans $\mathfrak{M}$. Un *type* (*complet*) est un type partiel maximal. L'ensemble des n-types sur A est noté $S_n(A)$ (où le modèle ambient $\mathfrak{M}$ est omis de la notation). On pose $S(A) = \bigcup_{n<\omega} S_n(A)$.
Si p est un type (partiel) et $\bar{a}$ satisfait toutes les formules de p, on dit que $\bar{a}$ est une *réalisation* de p, ou que $\bar{a}$ *réalise* p, noté $\bar{a} \models p$ ou $a \models_{\mathfrak{M}} p$.
Si T est une théorie, on note $S_n(T)$ l'ensemble de tous les types sur $\emptyset$ dans tous les modèles de T, et $S(T) = \bigcup_{n<\omega} S_n(T)$.
Si un type partiel ne consiste que de formules sans quanteurs ou existentielles, on parle d'un type partiel sans quanteurs ou existentiel ; un type sans quanteurs/existentiel est un tel type partiel maximal. Notamment $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A)$ est l'ensemble des formules sans quanteurs avec paramètres dans A satisfaites par $\bar{a}$ dans $\mathfrak{M}$.

Remarque 3.10. Comme il y a au plus $|\mathcal{L}| + |A| + \omega$ formules avec paramètres dans A, il y a au plus $2^{|\mathcal{L}|+|A|+\omega}$ types sur A.

Remarque 3.11. Un type sur A est complet ssi pour toute $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(\bar{x}$, soit $\varphi(\bar{x}) \in p$ soit $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$. En fait, si ni $\varphi(\bar{x}) \in p$ ni $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$, par maximalité il y a des partie finie $p_0, p_1 \subseteq p$ telles que ni $p_0(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ ni $p_1(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ ait une réalisation dans $\mathfrak{M}$. Mais $p_0 \cup p_1$ a une réalisation $\bar{m}$ dans M, et soit $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \varphi(\bar{x})$ soit $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \neg\varphi(\bar{x})$, ce qui donne une contradiction. La réciproque est évidente.

Exemple 3.12. Soit $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$. Les uples $(2, 5, 9)$ et $(3, 4, 8)$ ont même type sans quanteurs. Par contre, si on pose $\varphi(x, y, z) = \exists t\ x < t < y$ alors $\mathfrak{M} \models \varphi(2, 5, 9)$ mais $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(3, 4, 8)$, et ces deux uples n'ont pas même type.

Exercice 3.13. Montrer qu'un type $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ est bien un type complet.

Exercice 3.14. Montrer qu'on peut compléter tout type partiel en un type complet.

Exercice 3.15. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq M$. Alors un n-type $p(\bar{x})$ n'est rien d'autre qu'une $\mathcal{L}(\bar{c})$-théorie qui étend $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, où l'on a substitué $\bar{x}$ pour $\bar{c}$.

Remarque 3.16. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures, $A \subseteq M$ et $\bar{a} \in M^n$.
— Si $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ alors $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.
— Si $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ alors $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.
Par exemple si $\mathfrak{M} = \langle 2\mathbb{Z}, < \rangle$ et $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ alors $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(0, 2) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(0, 2)$ mais $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(0, 2) \neq \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(0, 2)$.

On peut considérer type type complet comme type réalisé dans une extension élémentaire.

Proposition 3.17. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $p \in S_n(A)$. Alors il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ et un n-uple $\bar{a}$ dans N tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.*

Démonstration. On considère $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup p(\bar{c})$, où $\bar{c}$ sont des nouvelles constantes. Puisque toute partie finie de p a une réalisation dans $\mathfrak{M}$, toute partie finie de Σ est realisable dans $\mathfrak{M}$ en interprétant $\bar{c}$ par un n-uple convenable de M. Donc Σ a un modèle $\mathfrak{N}$. Comme $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$, il est extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ (en identifiant $M \ni m$ et $m^{\mathfrak{N}}$). On pose $\bar{a} = \bar{c}^{\mathfrak{N}}$; il est évident que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A) = p$. $\square$

Remarque 3.18. Soit σ un isomorphisme partiel de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, et $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Alors $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{a}))$; si σ est élémentaire, alors $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{a}))$.

Pour la réciproque, on doit s'autoriser à remplacer $\mathfrak{M}$ par une extension élémentaire. D'abord un lemme préparatoire.

Lemme 3.19. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et σ un automorphisme partiel élémentaire. Alors il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ et un isomorphisme partiel élémentaire $\tau : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ de domaine $\mathfrak{M}$ qui prolonge σ.*

Démonstration. Associons à chaque $m \in \mathfrak{M}$ une nouvelle constante m' et considérons l'ensemble des énoncés suivants dans le langage $\mathcal{L} \cup \{m, m' \colon m \in M\}$,

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{\varphi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \mathrm{dom}(\sigma)\}.$$

Montrons que Σ est consistant. Pour cela considérons en une partie finie

$$\Sigma_0 := \theta(\bar{m}) \cup \{\varphi(\bar{m}'_i, \sigma(\bar{n}_i)) : i \in I\}.$$

Alors

$$\mathfrak{M} \models \exists (\bar{x}_i)_{i \in I} \bigwedge_{i \in I} \varphi(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i)), \quad \text{car} \quad \mathfrak{M} \models \exists (\bar{x}_i)_{i \in I} \bigwedge_{i \in I} \varphi(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$$

et σ est élémentaire. On peut donc interpréter les m' dans $\mathfrak{M}$ tel que $(\mathfrak{M}, M, M') \models \Sigma_0$. Par compacité il existe un modèle $\mathfrak{N}$ de Σ ; comme $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$ on a $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$. Considérons $\tau : M \to N$ défini par $m \mapsto (m')^{\mathfrak{N}}$. En prenant $\bar{m} = \bar{n}$, on voit que la formule $\bar{m}' = \sigma(\bar{m})$ est dans Σ pour tout $\bar{n} \in \mathrm{dom}(\sigma)$, doncs τ prolonge σ. De plus, pour tout $\bar{m} \in \mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{N} \models \varphi(\tau(\bar{m})),$$

donc τ est un isomorphisme partiel élémentaire. □

Proposition 3.20. *Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$, et $A \subseteq M$. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur A si et seulement s'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ et un automorphisme σ de $\mathfrak{N}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.*

Démonstration. Puisque $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$, il y a un isomorphisme partiel σ_0 de $\mathfrak{M}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ (et ainsi la sous-structure engendré par $A\bar{a}$ sur celle engendré par $A\bar{b}$). D'après le lemme 3.19 on peut construire une chaîne d'extensions élémentaires

$$\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq .... \preccurlyeq \mathfrak{M}_n \preccurlyeq ...$$

avec $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ et une chaîne

$$\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq ... \subseteq \sigma_n \subseteq \cdots$$

d'isomorphismes partiels élémentaires $\sigma_i : \mathfrak{M}_i \to \mathfrak{M}_i$ telle que pour tout $i < \omega$ le domaine de σ_{2i+1} contient $\mathfrak{M}_{2i}$ et l'image de σ_{2i+2} contient $\mathfrak{M}_{2i+1}$ (aux étapes paires on prolonge σ_{2i} et aux étapes impaires σ_{2i+1}^{-1}). Alors $\mathfrak{N} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{M}_i$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ et $\bigcup_{i \in \omega} \sigma_i$ est un automorphisme de $\mathfrak{N}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. La réciproque est évidente. □

Exercice 3.21 (Svenonius)**.** Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ un ensemble de paramètres et D une partie de M^n définissable dans $\mathfrak{M}$. Alors D est définissable à paramètres dans A si et seulement si D est invariant par tout automorphisme fixant A de toute extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Comme pour les théories on peut munir $S_n(A)$ d'une topologie, en prenant les ensembles

$$[\varphi] = \{p \in S_n(A) \colon \varphi \in p\}$$

comme base de fermés, pour $\varphi \in \mathcal{L}(A)$ avec variables libres $x_1, \ldots, x_n$. Puisque $[\neg\varphi]$ est le complément de $[\varphi]$, c'est une base d'ouvert-fermés, et la topologie est totalement discontinue. Le théorème de compacité nous dit que $S_n(A)$ est compact.
Plus généralement, on peut considérer des types en une infinité de variables libres $(x_i : i < \alpha)$; tout le développement précédent va aussi bien pour eux.

3.3 Elimination des quanteurs

Quand on considère une théorie sur un langage donné, il est intéressant d'isoler un sous-ensemble des formules du premier ordre suffisant pour décrire les ensembles définissables dans les modèles de cette théorie. L'étude des propriétés des modèles en question s'avère ainsi simplifiée. Le cas particulier de l'élimination des quanteurs est le cas où toute formule est équivalente modulo la théorie à une formule sans quanteurs.

Définition 3.22. Une théorie T *élimine les quanteurs* si pour tout $n > 0$ et toute formule $\psi(\bar{x})$ où $\bar{x}$ est un n-uplet de variables il existe une formule $\varphi(\bar{x})$ sans quanteur telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Notons que si une théorie T élimine les quanteurs alors le type de tout uple dans un modèle de T est déterminé par son type sans quanteurs. Réciproquement, pour vérifier l'élimination des quanteurs (ou plus généralement l'élimination à un sous-ensemble de formules), on utilisera la méthode de va-et-vient afin de montrer que deux uples ayant même type sans quanteurs ont même type et on pourra conclure à l'aide de la caractérisation suivante.

Proposition 3.23. *Soit T une théorie et Φ un ensemble non vide de formules de $\mathcal{L}$ tels que pour tout entier $n > 0$, deux n-uples extraits de modèles de T ont même types dès qu'ils satisfont les mêmes formules de Φ. Alors pour toute formule $\psi(\bar{x})$ de $\mathcal{L}$ il existe une combinaison booléenne $\varphi(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que*

$$T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})).$$

En particulier si pour tout $n > 0$, tout $\mathfrak{M} \models T$, tout $\mathfrak{N} \models T$, tout $\bar{a} \in M^n$ et tout $\bar{b} \in N^n$ l'égalité $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(\bar{b})$ implique que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{b})$, alors T élimine les quanteurs.

Démonstration. Soit $\psi(\bar{x})$ une formule de $\mathcal{L}$. Si ψ n'est satisfaite dans aucun modèle de T, on considère une formule θ de Φ et on a

$$T \vdash \forall \bar{x}\,[\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (\theta(\bar{x}) \wedge \neg\theta(\bar{x}))]$$

Sinon, soit $\mathfrak{M} \models T$ et $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})$. Considérons $\bar{c}$ un n-uple de nouvelles constantes. Alors l'ensemble d'énoncés

$$T \cup \{\varphi(\bar{c})\colon \varphi \in \Phi \text{ et } \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})\} \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\colon \varphi \in \Phi \text{ et } \mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{a})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c})\}$$

est inconsistant par hypothèse. Par compacité une partie finie est inconsistante, ce qui nous donne une combinaison booléenne $\varphi_{\bar{a}}(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $\mathfrak{M} \models \varphi_{\bar{a}}(\bar{a})$ et $T \cup \{\varphi_{\bar{a}}(\bar{c})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c})\}$ est inconsistant. Ainsi $\mathfrak{M} \models \varphi_{\bar{a}}(\bar{a})$ et

$$T \vdash \forall \bar{x}(\varphi_{\bar{a}}(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})).$$

Soit maintenant $(\mathfrak{M}_i, \bar{a}_i)_{i \in I}$ une énumération de tous les types possibles d'un n-uple dans un modèle $\mathfrak{M}_i$ de T tel que $\mathfrak{M}_i \models \psi(\bar{a}_i)$. Alors

$$T \cup \{\neg\varphi_{\bar{a}_i}(\bar{c})\colon i \in I\} \cup \{\psi(\bar{c})\}$$

est inconsistant. Par compacité, il existe donc I_0 fini tel que

$$T \vdash \forall \bar{x}\,[\psi(\bar{x}) \to \bigvee_{i \in I_0} \varphi_{\bar{a}_i}(\bar{x})].$$

Alors ψ est équivalente modulo T à $\bigvee_{i \in I_0} \varphi_{\bar{a}_i}$. $\square$

Exemple 3.24. Considérons la théorie T de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies dans le langage $\mathcal{L} = \{E\}$. Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux modèles de T. On vérifie alors que les isomorphismes partiels de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$ à domaine fini forment un système de va-et-vient. On en déduit que T est complète et élimine les quanteurs. En particulier :

— Il y a un unique 1-type.

— Il y a trois 2-types : le type déterminé par $x_1 = x_2$, celui déterminé par $(x_1 \neq x_2) \wedge E(x_1, x_2)$ et enfin celui déterminé par $\neg E(x_1, x_2)$.

On peut remarquer que tout type de $S(T)$ est réalisé dans tout modèle de T.

Exemple 3.25. La théorie des ordres totaux denses sans extrémité élimine les quanteurs, car les isomorphismes partiels finis forment un système de va-et-vient. Les 1-types sur A correspondent donc à la coupure qu'ils déterminent sur A. En particulier il y a six classes de 1-types sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} p_q &= \{x = q\} \text{ pour } q \in \mathbb{Q}, & p_{q^+} &= \{q < x < q' \colon q' > q\} \text{ pour } q \in \mathbb{Q}, \\ p_{+\infty} &= \{x > q \colon q \in \mathbb{Q}\}, & p_{q^-} &= \{q' < x < q \colon q' < q\} \text{ pour } q \in \mathbb{Q}, \\ p_{-\infty} &= \{x < q \colon q \in \mathbb{Q}\}, & p_r &= \{q' < x < q \colon q' < r < q\} \text{ pour } r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Exercice 3.26. Soit K un corps. On exprime la théorie T des K-espaces vectoriels infinis dans le langage $\mathcal{L}_K := \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ où pour tout $k \in K$, λ_k est une fonction unaire qui est interprétée dans un K-espace vectoriel par la multiplication par k. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.

Remarque 3.27. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux correspond à la théorie des $\mathbb{Q}$-e.v. infinis : on définit dans un groupe divisible sans torsion $\lambda_{p/q}$ par $px = qy$ qui est une formule sans quanteur. On en déduit que cette théorie élimine elle aussi les quanteurs.

Les propriétés d'élimination dépendent du langage choisi :

Remarque 3.28 (Morleyisation)**.** Soit T une théorie quelconque. Pour toute formule $\varphi(\bar{x})$ on rajoute une nouvelle relation $R_\varphi(\bar{x})$ au langage, et l'axiome $\forall \bar{x}\, [\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})]$ à la théorie, pour former le langage $\mathcal{L}'$ et la théorie T'. Alors T' elimine facilement les quanteurs : une $\mathcal{L}$-formule φ est équivalente à R_φ ; quant aux $\mathcal{L}'$-formules on remplace d'abord les éventuelles sous-formules R_ψ par ψ pour obtenir une $\mathcal{L}$-formule équivalente. Ceci a pour effet de changer la notion de sous-structure : si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de T avec $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, ils ont des expansions canoniques a des modèles de T' en interpretant

$$R_\varphi^{\mathfrak{M}} := \{\bar{m} \in M : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})\}$$

(et similairement pour $\mathfrak{N}$). Mais comme $\mathcal{L}'$-structures on a $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ si et seulement si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

Voici une condition plus faible que l'élimination des quantificateurs.

Définition 3.29. Une théorie T est *modèle-complète* si toute inclusion de modèles de T est élémentaire.

Proposition 3.30. *Une théorie qui élimine les quanteurs est modèle-complète.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des modèles de T avec $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, et $\varphi(\bar{m})$ un énoncé à paramètres dans $\mathfrak{M}$. Alors $\varphi(\bar{x})$ est équivalent dans tout modèle de T à une formule $\psi(\bar{x})$ sans quanteurs, et

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}). \quad \square$$

Exemple 3.31. La $\mathcal{L}_{ann}$-théorie de $\mathbb{R}$ est modèle-complète, mais n'élimine pas les quanteurs : $\exists y\, y^2 = x$ n'est pas équivalente à une formule sans quanteurs. Par contre, $\mathbb{R}$ élimine les quanteurs si on rajoute l'ordre au langage.

Théorème 3.32. *Une théorie est modèle-complète si et seulement si toute formule est équivalente modulo T à une formule existentielle.*

Démonstration. Si toute formule est équivalente à une formule existentielle, considérons deux modèles $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, et une formule $\varphi(\bar{m})$ vraie dans $\mathfrak{M}$. Elle est équivalente à une formule $\exists \bar{x}\, \psi(\bar{x}, \bar{m})$ avec ψ sans quanteurs, et on trouve $\bar{n} \in M$ tels que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$. Donc $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$, et $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x}\, \psi(\bar{x}, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$. On a bien $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.
Réciproquement, supposons que T soit modèle-complète, et notons qu'une conjonction ou disjonction de deux formules existentielles est équivalente à une formule existentielle. Considérons deux modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T, ainsi que deux uples $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$.

Supposons que les formules existentielles satisfaites par $\bar{m}$ dans $\mathfrak{M}$ forment un sous-ensemble des formules existentielles satisfaites par $\bar{n}$ dans $\mathfrak{N}$. Soient $\{c_m : m \in M\}$ des nouvelles constantes, et considérons

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, N) \cup \{\varphi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}, \bar{n}) : \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_k, \bar{m}), \varphi \text{ atomique}\}.$$

Chaque sous-ensemble fini $\Phi_0(\bar{c}, \bar{n})$ de Φ est interpretable dans $\mathfrak{N}$, comme

$$\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge \Phi_0(\bar{x}, \bar{m}) \quad \text{implique} \quad \mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \bigwedge \Phi_0(\bar{x}, \bar{n}).$$

Donc il y a un modèle $\mathfrak{N}'$ de Φ, extension élémentaire de $\mathfrak{N}$, qui contient une copie de $\mathfrak{M}$, l'ensemble $\mathfrak{M}' = \{c_m^{\mathfrak{N}'} : m \in M\}$, comme sous-structure ; notons que l'uple correspondant à $\bar{m}$ est $\bar{n}$. Par modèle-complétude $\mathfrak{M}' \preceq \mathfrak{N}'$. Pour chaque formule on a

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N}' \models \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n}).$$

Donc $\bar{m}$ et $\bar{n}$ satisfont les mêmes formules. Par la proposition 3.23 chaque formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules existentielles.
Il nous reste de voir qu'une formule universelle $\varphi(\bar{x})$ est équivalente à une formule existentielle. Soit $\Phi(\bar{x})$ la collection des formules existentielles en $\bar{x}$ qui impliquent $\varphi(\bar{x})$ modulo T, et

$$\Psi(\bar{x}) = \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})\}.$$

Soient $\bar{c}$ des nouvelles constantes, et supposons que

$$T \cup \Psi(\bar{c}) \cup \{\varphi(\bar{c})\}$$

a un modèle $\mathfrak{M}$. Si $\Phi_0(\bar{x})$ est la collection des formules existentielles satisfaites par $\bar{c}^{\mathfrak{M}}$, alors $T \cup \Phi_0(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$ n'a pas de modèle ($\bar{c}$ et $\bar{d}$ doivent satisfaire les mêmes formules par la première partie de la preuve), et il y a une partie finie $\Phi_0'(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$ qui est inconsistante avec T. Mais ça signifie que $\psi(\bar{x}) := \bigwedge \Phi_0'(\bar{x})$ implique $\varphi(\bar{x})$ modulo T. Donc $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$, et $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\bar{c})$, en contradiction avec $\mathfrak{M} \models \Phi_0'(\bar{c})$.
Il y a donc une partie finie $\Psi_0(\bar{x})$ de $\Psi(\bar{x})$ telle que $T \cup \Psi_0(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ est inconsistant. Donc $\bigwedge \Psi_0(\bar{x})$ implique $\neg\varphi(\bar{x})$ modulo T, et $\varphi(\bar{x})$ implique

$$\psi_0(\bar{x}) := \bigvee \{\psi(\bar{x}) : \neg\psi(\bar{x}) \in \Psi_0(\bar{x})\}$$

modulo T. Comme $\psi(\bar{x})$ implique $\varphi(\bar{x})$ modulo T pour toute $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$, la formule $\varphi(\bar{x})$ est équivalente à $\psi_0(\bar{x})$. $\square$

Donc pour une théorie modèle-complète, les formules existentielles forment un ensemble d'élimination, où on n'a même pas besoin des combinaisons booléennes.

3.4 Les corps algébriquement clos

Nous vérifions dans cette section que la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs et nous en déduisons une preuve du théorème des zéros de Hilbert.

Proposition 3.33 (Tarski, 1948). *La théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs (dans le langage des anneaux $\mathcal{L}_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$).*

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos et $\bar{a} \in K_1$ et $\bar{b} \in K_2$ deux uples satisfaisant les mêmes formules atomiques. Dans ce cas K_1 et K_2 ont même caractéristique car $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ est une formule atomique pour tout p. De plus $\bar{a}$ et $\bar{b}$ satisfont les mêmes équations polynomiales sur le corps premier, donc ils engendrent deux sous-corps k_1 et k_2 isomorphes. On peut supposer, en passant à des extensions élémentaires, que K_1 et K_2 sont de degré de transcendance infini. On a vu (voir exemple 1.41) qu'il existe alors un va-et-vient de K_1 sur K_2 contenant l'isomorphisme de k_1 sur k_2 qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. □

Exemple 3.34. Dans la théorie d'un corps algébriquement clos K un 1-type p sur un sous-corps k est déterminé

— soit par le polynôme minimal sur k d'une réalisation de p (éléments algébriques),
— soit par l'ensemble $\{P(x) \neq 0 : P \in k[X]\}$ (éléments transcendants).

Remarque 3.35. Soit K un corps commutatif considéré dans le langage $\mathcal{L}_{ann}$. La famille des ensembles atomiques de K est formée des parties définies par des équations polynômiales. Si on clôt par intersections finies, on obtient les *fermés de Zariski.* Alors si on clôt par combinaisons booléennes finies, on obtient les *ensembles constructibles.* Si K est algébriquement clos, il élimine les quanteurs, et la projection d'un constructible est encore constructible (Théorème de Chevalley).

Lemme 3.36. *Soit S un système fini d'équations et d'inéquations (en plusieurs inconnues), à coefficients dans un corps k. Si S a une solution dans une extension K de k, il a une solution dans toute extension algébriquement close de k.*

Démonstration. On peut voir S comme une formule sans quanteur $\varphi(x_1, ..., x_n, b_1, ..., b_m)$ dans le langage des anneaux où les x_i correspondent aux inconnues et les b_i sont les coefficients dans le corps k. Alors il existe $\bar{a} \in K$ tel que $K \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. Soit K_1 une extension de K algébriquement close. Comme φ est sans quanteur, $K_1 \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$.
Considérons une autre extension K_2 de k algébriquement close. Alors les clôtures algébriques $\bar{k}_1$ de k dans K_1 et $\bar{k}_2$ de k dans K_2 sont isomorphes au-dessus de k. Comme la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs, $\bar{k}_1 \preccurlyeq K_1$ et $\bar{k}_2 \preccurlyeq K_2$ et donc comme $K_1 \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{b})$ on a $\bar{k}_1 \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{b})$, d'où $\bar{k}_2 \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{b})$ et $K_2 \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{b})$. □

Théorème 3.37 (Théorème des zéros de Hilbert). *Soit K un corps algébriquement clos, I un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ et $P \in K[X_1, ..., X_n]$. Supposons que pour tout $\bar{a} \in K^n$, si $Q(\bar{a}) = 0$ pour tout $Q \in I$ alors $P(\bar{a}) = 0$. Alors il existe m tel que $P^m \in I$.*

Démonstration. Supposons que $P^m \notin I$ pour tout m, et soit J un idéal contenant I mais aucun des P^m, maximal pour ces propriétés. On vérifie facilement que J est premier : Si $QR \in J$ mais $Q \notin J$ et $R \notin J$, alors par maximalité il y a un entier m et des polynomes $S, S' \in J$ et T, T' tels que

$$P^m = TQ + S = T'R + S'.$$

Ainsi $P^{2m} = (TQ + S)(T'R + S') \in J$, une contradiction.
Soit L le corps de fractions de $K[X_1, ..., X_n]/J$. Ainsi L contient K. Soient $Q_1, ..., Q_r$ des générateurs de J. Alors le système $S := \{Q_1 = 0, ..., Q_r = 0, P \neq 0\}$ a une solution $\bar{X} + J$ dans L, et donc d'après le lemme précédent une solution dans K, mais cette solution contredit l'hypothèse. $\square$

Chapitre 4

Modèles atomiques, modèles saturés

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des modèles réalisant peu, ou beaucoup de types.

4.1 Types isolés et omission de types

Définition 4.1. Un type $p(\bar{x})$ sur A dans un modèle $\mathfrak{M}$ est *algébrique* s'il y a une $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ qui n'a qu'un nombre fini de réalisations. Un uple $\bar{a}$ est *algébrique sur* A si $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ l'est.

Exercice 4.2. Un uple $\bar{a}$ est algébrique sur A si et seulement s'il est contenu dans chaque sous-structure élémentaire contenant A de toute extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Nous avons vu qu'on peut toujours trouver un modèle qui réalise un type. Mais est-ce qu'on peut en trouver un qui ne le réalise pas ?

Définition 4.3. Un type $p(\bar{x})$ sur A est *principal*, ou *isolé*, s'il y a une formule $\varphi(\bar{x})$ dans $p(\bar{x})$ telle que $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\varphi(\bar{x})\} \models p(\bar{x})$. Dans ce cas, la formule $\varphi(\bar{x})$ *isole* $p(\bar{x})$ sur A.

Une reformulation nous donne : $\varphi(\bar{x})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ si et seulement si

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\varphi(\bar{a})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a}).$$

Topologiquement, $\varphi(\bar{x})$ *isole* $p \in S_n(T)$ si p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant $\varphi(\bar{x})$, c'est-à-dire si l'ouvert fermé $[\varphi(\bar{x})]$ de $S_n(T)$ est réduit à $\{p\}$.

Exercice 4.4. Un type algébrique est isolé.

Lemme 4.5. $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}\bar{b}/A)$ *est isolé ssi* $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A\bar{b})$ *et* $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$ *le sont.*

Démonstration. Si $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}\bar{b}/A)$, alors $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A\bar{b})$, et $\exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$. Réciproquement, si $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A\bar{b})$ et $\psi(\bar{y})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$, alors

$$\mathrm{Th}(M, A) \cup \{\psi(\bar{b})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \cup \{\varphi(\bar{a}, \bar{b})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a}\bar{b})\}.$$

Donc $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}\bar{b}/A)$. $\square$

Il est évident qu'un type principal est réalisé dans chaque modèle contenant A, comme $\exists\bar{x}\,\varphi(\bar{x})$ fait partie de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$.

Exemple 4.6. Soit $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Pour chaque $m \geq 1$, notons $d_m(x, y)$ une formule exprimant qu'il existe exactement $m - 1$ éléments strictement compris entre x et y, c'est-à-dire si x et y sont à distance m. On peut vérifier que tout type de $S_2(T)$ est de l'un des types suivants

— le type isolé par la formule $x_1 = x_2$,
— pour chaque $m \geq 1$, le type isolé par la formule $(x_1 < x_2) \wedge d_m(x_1, x_2)$,
— pour chaque $m \geq 1$, le type isolé par la formule $(x_1 > x_2) \wedge d_m(x_1, x_2)$,
— le type contenant les formules $x_1 < x_2$ et $\neg d_m(x_1, x_2)$ pour tout $m \geq 1$,
— le type contenant les formules $x_1 > x_2$ et $\neg d_m(x_1, x_2)$ pour tout $m \geq 1$.

Remarquons que les deux derniers types ne sont pas réalisés dans $\mathfrak{M}$.

Voici une méthode pratique permettant de construire une sous-structure élémentaire dénombrable vérifiant des propriétés voulues :

Proposition 4.7 (Théorie de Henkin)**.** *Soit $\mathcal{L}$ un langage, T une $\mathcal{L}$-théorie, $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ un cardinal infini, et $C = \{c_i : i < \kappa\}$ des nouvelles constantes. On choisit une énumération $(\varphi_i(x) : i < \kappa)$ des $\mathcal{L}(C)$-formules à une variable libre telle que chaque φ_i ne contient que de nouvelles constantes c_j avec $j < i$, et on forme la $\mathcal{L}(C)$-théorie de Henkin*

$$T_H = T \cup \{\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i) : i < \kappa\}.$$

Alors tout modèle $\mathfrak{M}$ non-vide de T a une $\mathcal{L}(C)$-expansion $\mathfrak{M}_C$ modèle de T_H. De plus, dans tout modèle $\mathfrak{M}_C \models T_H$ l'ensemble $\{c_i^{\mathfrak{M}_C} : i < \kappa\}$ forme une sous-structure $\mathcal{L}(C)$-élémentaire.

Démonstration. Si $\mathfrak{M} \models T$ on interprète c_i récursivement pour $i < \kappa$ par une réalisation de $\varphi_i(x)$, s'il y en a, et par n'importe que élément de M sinon. Il est évident que l'expansion $\mathfrak{M}_C$ ainsi obtenue satisfait chaque formule $\exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(c_i)$, et donc $\mathfrak{M}_C \models T_H$. De plus, si $\mathfrak{M}_C \models T_H$ alors l'ensemble $\{c_i^{\mathfrak{M}_C} : i < \kappa\}$ satisfait le Test de Tarski. $\square$

Définition 4.8. Soit T une théorie et p un type de $S(T)$. On dira qu'un modèle de T *omet* p s'il ne réalise pas p.

Rappelons que dans un espace topologique une partie X est *maigre* si elle est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (autrement dit, son complémentaire est une intersection dénombrable d'ouverts denses). Alors le théorème de Baire implique que dans un espace localement compact, le complément d'une partie maigre est toujours dense.

Théorème 4.9 (Omission des types)**.** *Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$ dénombrable, et pour tout $n < \omega$ soit X_n une partie maigre de $S_n(T)$. Alors il existe un modèle $\mathfrak{M} \models T$ qui omet tous les types dans X_n, pour tout $n < \omega$.*

Démonstration. On considère la théorie de Henkin T_H pour l'ensemble $C = \{c_i : i < \omega\}$ de témoins de Henkin. Soit $p(\bar{x})$ un fermé d'intérieur vide dans $S_n(T)$.
On montre d'abord que pour tout $\bar{c} \in C$ l'ouvert $T_H \setminus [p(\bar{c})]$ est dense dans T_H. Soit donc $[\varphi(\bar{c}')]$ un ouvert non-vide dans T_H ; il faut montrer que

$$T_H \cup \{\varphi(\bar{c}')\} \not\models p(\bar{c}).$$

Soit $(c_i : i < \ell)$ un segment initial de C contenant $\bar{c}$ et $\bar{c}'$. Soient $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ les parties de $(x_i : i < \ell)$ correspondant à $\bar{c}$ et $\bar{c}'$ dans $(c_i : i < \ell)$, et $\bar{x}'' = (x_i : i < \ell) \setminus \bar{x}$. On pose

$$\psi(\bar{x}, \bar{x}'') = \varphi(\bar{x}') \wedge \bigwedge_{i<\ell} \exists x \varphi_i(x) \to \varphi_i(x_i).$$

Alors $[\exists \bar{x}''\, \psi(\bar{x}, \bar{x}'')]$ est un ouvert non-vide de $S_n(T)$ puisque $[\varphi(\bar{c}')]$ est non-vide dans T_H. Comme $p(\bar{x})$ est d'intérieur vide, il ne contient pas $[\exists \bar{x}''\, \psi(\bar{x}, \bar{x}'')]$, et il y a un modèle $\mathfrak{M} \models T$ et $\bar{m}$ dans M tel que $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \exists \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})$ mais $\bar{m} \not\models_{\mathfrak{M}} p$. Soit m'' dans M tel que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}, \bar{m}'')$. Alors on peut interpréter $c_i^{\mathfrak{M}_C} = m_i$ pour $i < \ell$ et récursivement trouver des interprétations dans M pour les $(c_i : i \geq \ell)$ afin d'étendre $\mathfrak{M}$ en une $\mathcal{L}(C)$-structure modèle de T_H. Par construction, $\mathfrak{M}_C \models \varphi(\bar{c}')$ mais $\mathfrak{M}_C \not\models p(\bar{c})$. Ainsi $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}(C)}(\mathfrak{M}_C) \in [\varphi(\bar{c}')] \setminus [p(\bar{c})]$.
D'après le théorème de Baire, l'intersection

$$\bigcap \{\neg p(\bar{c}) : n < \omega,\ p \in X_n,\ \bar{c} \in C^n\}$$

est de complément dense dans T_H. Soit T' une théorie complète dans ce complément, et $\mathfrak{N}_C \models T'$. Alors $(c_i^{\mathfrak{N}_C} : i < \omega)$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$ qui omet tous les types dans les X_n pour $n < \omega$. □

4.2 Modèles

Définition 4.10. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq B \subseteq M$, et λ un cardinal infini.

— B est *atomique* sur $A \subseteq M$ si $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ est isolé pour chaque uple fini $\bar{b}$ de B. Comme toujours, on supprime «sur $\emptyset$».

— B est *construit* sur A s'il existe une énumération $(b_i : i < \alpha)$ de $B \setminus A$ tel que $\mathrm{tp}(b_i/A, b_j : j < i)$ est isolé pour tout $i < \alpha$. L'énumération $(b_i : i < \alpha)$ s'appelle une *construction* de B sur A.

— $\mathfrak{M}$ est *premier* sur A si $\mathfrak{M}$ se plonge élémentairement dans tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$.

— $\mathfrak{M}$ est *minimal* sur A s'il n'y a pas de sous-structure élémentaire propre de $\mathfrak{M}$ contenant A.

— $\mathfrak{M}$ est λ-*homogène* si l'ensemble des isomorphismes partiels élémentaires dont le domaine est de cardinalite $< \lambda$ forme un système de va-et-vient, et *homogène* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-homogène.

— $\mathfrak{M}$ est *fortement λ-homogène* si tout isomorphisme partiel élémentaire dont le domaine est de cardinalite $< \lambda$ se prolonge en un automorphisme, et *fortement homogène* si $\mathfrak{M}$ est fortement $|\mathfrak{M}|$-homogène.
— $\mathfrak{M}$ est *λ-universel* si $\mathfrak{M}$ réalise tout λ-type sur $\emptyset$, et *universel* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-universel.
— $\mathfrak{M}$ est *λ-saturée* si $\mathfrak{M}$ réalise tout 1-type sur un domaine $A \subseteq M$ de cardinalité $< \lambda$, et *saturée* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-saturé.

Proposition 4.11. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq B \subseteq M$, et λ un cardinal infini.*

1. *Si $B \setminus A$ est dénombrable et B est atomique sur A, alors B est construit sur A.*
2. *Si B est construit sur A, alors B est atomique sur A.*
3. *Si $\mathfrak{M}$ est construit sur A, alors $\mathfrak{M}$ est premier sur A.*
4. *Si $\mathcal{L}(A)$ est dénombrable et $\mathfrak{M}$ est premier sur A, alors $\mathfrak{M}$ est construit sur A.*
5. *Si $\mathfrak{M}$ est fortement λ-homogène, alors $\mathfrak{M}$ est λ-homogène.*
6. *Si $\mathfrak{M}$ est λ-saturée et $A \subseteq M$ est de cardinalité $< \lambda$, alors $\mathfrak{M}$ réalise tout λ-type sur A.*
7. *$\mathfrak{M}$ est λ-saturée ssi $\mathfrak{M}$ est λ-universel et λ-homogène.*

Démonstration. 1. Découle du Lemme 4.5.

2. Soit $(b_i : i < \alpha)$ une construction de B sur A. On montre par récurrence que $\{b_i : i < j\}$ est atomique sur A pour tout $j \leq \alpha$. C'est évident pour $j = 0$ ou j limite. Soit $j = k + 1$ et $\bar{b} \in \{b_i : i \leq k\}$. On pose $\bar{b}' = \bar{b} \setminus \{b_k\}$. Alors $\text{tp}(b_k/A, b_i : i < k)$ est isolé par une formule $\varphi(x, \bar{b}'')$ avec $\varphi \in \mathcal{L}(A)$ et $\bar{b}'' \in \{b_i : i < k\}$. Cette même formule isole $\text{tp}(b_k/A, \bar{b}', \bar{b}'')$. Puisque $\text{tp}(\bar{b}'\bar{b}''/A)$ est isolé par hypothèse de récurrence, $\text{tp}(b_k\bar{b}'\bar{b}''/A)$ est isolé, ainsi que $\text{tp}(\bar{b}/A)$, par le lemme 4.5.

3. Soit $(a_i : i < \alpha)$ une construction de $\mathfrak{M}$ sur A. Puisque tout type isolé est réalisé dans tout modèle $\mathfrak{N}$ de $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$, on trouve par récurrence transfinie sur j une suite $(b_i : i < \alpha)$ d'éléments de N telle que $(\mathfrak{M}, A, a_i : i \leq j) \equiv (\mathfrak{N}, A, b_i : i \leq j)$.

4. Si $\mathfrak{M}$ n'est pas atomique sur A, alors il réalise un type non-principal $p \in S(A)$. Par le théorème 4.9 il y a un modèle $\mathfrak{N}$ de $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ qui omet p, et $\mathfrak{M}$ ne peut pas se plonger élémentairement dans $\mathfrak{N}$ sur A comme la réalisation de p n'a pas d'image possible. D'autre part, si $\mathcal{L}(A)$ est dénombrable, alors il y a un modèle dénombrable de $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ par le corollaire 1.36. Ainsi un modèle premier sur A est atomique et dénombrable, d'où construit d'après le 1.

5. Suit immédiatement des définitions.

6. Soit $p(x_i : i < \lambda) \in S_\lambda(A)$, et pour $i < \lambda$ soit $\bar{x}_i = (x_j : j < i)$ et $p_i(\bar{x}_i, x_i)$ la restriction de p aux variables $(\bar{x}_i, x_i)$. Alors par λ-saturation on trouve récursivement des réalisations $m_i \in M$ de $p_i(\bar{m}_i, x_i)$, et $(m_i : i < \lambda) \models p$.

7. Exercice. $\square$

Remarque 4.12. Si $|A| < \lambda < |S(A)|$ pour un sous-ensemble A d'un modèle de T, alors il n'y a pas de modèle saturé de cardinal λ (un tel modèle devrait contenir une copie A' de A, et ensuite réalisations de tous les types sur A').

Exercice 4.13. Soit B construit sur A. Montrer que $|B| \leq |\mathcal{L}(A)|$.

Proposition 4.14. *Une théorie complète dénombrable a un modèle atomique ssi les types isolés sont denses dans $S(T)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{M} \models T$ atomique, et $[\varphi(\bar{x})]$ un ouvert non-vide de $S_n(T)$. Alors $\exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x})$ est dans T par complétude, et il y a $\bar{m}$ dans M avec $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$. Ainsi $\mathrm{tp}(\bar{m}) \in [\varphi(\bar{x})]$ est un type isolé.
Réciproquement, supposons que les types isolés soient denses dans $S(T)$, et soit $\mathfrak{M} \models T$. On étend récursivement $\mathfrak{M}$ en un modèle de la théorie de Henkin T_H pour un ensemble $C = (c_i : i < \omega)$ de constantes, telle que $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(\bar{c})$ est isolé pour tout uple fini $\bar{c}$ dans C. On suppose qu'on a déjà trouve des interprétations $c_j^{\mathfrak{M}_C}$ dans C pour $j < i$ tel que $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(c_j : j < i)$ est isolé par une formule $\psi_i(\bar{x})$. Si $\mathfrak{M} \models \neg\exists x \varphi_i(x, c_j : j < i)$, on choisit un type p_i isolé dans $[\psi_i(\bar{x}) \wedge x_i = x_i]$. Si p_i est isolé par $\vartheta_i(\bar{x}, x_i)$ et réalisé dans $\mathfrak{M}$ par un uplet $(m_j : j \leq i)$, alors $(m_j : j < i)$ réalise ψ_i et a donc le même type que $(c_i^{\mathfrak{M}_C} : i < j)$. Il y a donc $m \in M$ réalisant $\vartheta_i(x, c_j : j < i)$, et on peut prendre $c_i^{\mathfrak{M}_C} = m$.
Si $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi_i(x, c_j : j < i)$, on prend p_i isolé dans $[\psi_i(\bar{x}) \wedge \varphi_i(x_i, \bar{x})]$, qui est alors un ouvert non-vide ; le reste de l'argument est le même. □

Proposition 4.15. *Une théorie complète a un modèle construit sur toute partie A d'un modèle ssi les types isolés sont denses dans $S_1(A)$ pour toute partie A d'un modèle.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{M} \models T$ et $A \subseteq M$.
Si T a un modèle $\mathfrak{N}$ construit sur A (c'est-à-dire $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ et N est construit sur A), alors pour tout ouvert non-vide $[\varphi(x, \bar{a})]$ de $S_1(A)$ on a $\exists x\, \varphi(x, \bar{a}) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, donc $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$, et il y a $n \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(n, \bar{a})$. Alors $\mathrm{tp}(n/A) \in [\varphi(x, \bar{a})]$ est isolé d'après la proposition 4.11.2.
Réciproquement, supposons que sur tout ensemble de paramètres les types isolés soient denses. On construit récursivement une suite $A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq M$ de parties de M : On prends des réunions aux étapes limites, on s'arrête si A_i satisfait le test de Tarski, et sinon, si $\varphi(x)$ est une $\mathcal{L}(A_i)$-formule qui a une réalisation dans M mais aucune dans A_i, on choisit un type p_i isolé dans $[\varphi(x)] \subseteq S_1(A_i)$. Alors p_i est réalisé dans $\mathfrak{M}$ par un élément a_i, et on pose $A_{i+1} = A_i \cup \{a_i\}$.
On s'arrête au plus tard quand on a épuisé M, et quand on s'arrête, on a trouvé une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$ construite sur A. □

Proposition 4.16. *1. Deux modèles atomiques dénombrables d'une théorie complète sont isomorphes. Plus généralement, si $(\mathfrak{M}, A) \equiv (\mathfrak{N}, B)$, $M \setminus A$ et $N \setminus B$ sont dénombrables, $\mathfrak{M}$ est atomique sur A et $\mathfrak{N}$ est atomique sur B, alors tout isomorphisme élémentaire partiel $\sigma_0 : A \to B$ se prolonge en un isomorphisme.*

2. *Deux modèles saturés de même cardinal λ d'une théorie complète sont isomorphies. Plus précisement, tout isomorphisme élémentaire partiel $\sigma_0 : A \to B$ de deux parties de cardinal $< \lambda$ se prolonge en un isomorphisme.*

Démonstration. Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de la même théorie complète, l'application vide est un isomorphisme partiel. Donc l'isomorphie des modèles est une conséquence de la possibilité de prolongement.
Dans le cas 1. on pose $\lambda = \omega$. Soient $(m_i : i < \lambda)$ et $(n_i : i < \lambda)$ des énumérations de $M \setminus A$ et de $N \setminus B$. On construit par récurrence une suite d'isomorphismes élémentaires partiels $(\sigma_i : i < \lambda)$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, tels que σ_i étend σ_j pour $j > i$, et pour tout $i \geq 0$, le domaine de σ_i contient $\{m_k : k < i\}$, et l'image de σ_i contient $\{n_k : k < i\}$, avec $|\mathrm{Dom}(\sigma_i) \setminus A| = |\mathrm{Im}(\sigma_i \setminus B| \leq 2 \cdot |i|$. Ceci est clair pour $i = 0$; pour i limite on peut prendre $\sigma_i = \bigcup_{j<i} \sigma_j$ (uniquement dans le cas 2.).
Supposons qu'on a trouvé σ_i, et soit A_i le domaine et B_i l'image de σ_i. Dans le cas 1. le type $\mathrm{tp}(m_i/A_i)$ est isolé par une formule $\varphi(x, A_i)$ d'après le lemme 4.5 ; comme $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, A_i)$ et σ_i est élémentaire, $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, B_i)$; soit $n \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(n, B_i)$. Comme σ_i est élémentaire, $\varphi(x, B_i)$ isole $\mathrm{tp}(n/B_i) = \sigma_i(\mathrm{tp}(m_i/A_i))$. Donc on peut étendre σ_i en envoyant m_i sur n. De même, comme $\mathrm{tp}(n_i/B_i, n)$ est isolé par une formule $\psi(x, B_i, n)$, on trouve $m \in M$ réalisant $\psi(x, A_i, m_i)$.
Dans le cas 2. le type $\sigma_i(\mathrm{tp}(m_i/A_i))$ est réalisé dans $\mathfrak{N}$ par un élément n par saturation de $\mathfrak{N}$, si $\sigma' = \sigma \cup \{m_i \mapsto n\}$, le type $\sigma'^{-1}(\mathrm{tp}(n_i/B_i, n))$ est réalisé dans $\mathfrak{M}$ par un élément m par saturation de $\mathfrak{M}$.
Dans les deux cas on ajoute au plus deux éléments au domaine et à l'image, ce qui conserve la condition sur leur cardinalité.
Enfin, $\sigma = \bigcup_{i<\lambda} \sigma_i$ est l'isomorphisme recherché entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. □

Remarque 4.17. Il en découle que si $\mathcal{L}(A)$ est dénombrable, alors deux modèles premiers sur A sont A-isomorphes. Cependant, en général on peut avoir des modèles premiers non-isomorphes.

Exemple 4.18.
1. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ sont atomiques, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ est saturé, mais $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ n'est pas saturé : il omet le 2-type qui dit que la distance entre x et y est infini.
2. $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est atomique ; sa théorie n'a pas de modèle saturé de cardinal ω : pour tout ensemble P de nombres premiers il y a le type qui dit que x est divisible par p si et seulement si $p \in P$; ça fait 2^ω types sur $\emptyset$ qu'on ne peut pas tous réaliser dans un modèle dénombrable.
3. $\tilde{\mathbb{Q}}$ et $\tilde{\mathbb{F}}_p$ sont les corps algébriquement clos atomiques. $\mathbb{C}$ est saturé (de cardinal 2^ω), et $\widetilde{\mathbb{Q}(x_i : i < \omega)}$ est saturé dénombrable.

Exemple 4.19. Voici une théorie qui n'a pas de modèle atomique : Le langage comporte un ordre $<$ et un prédicat unaire P ; on considère la théorie de $\mathbb{R}$, ou on a ajoute une constante pour chaque rationel $q \in \mathbb{Q}$, et P est interpreté par $\mathbb{Q}$. Alors tout modèle contiendra une copie de $\mathbb{Q}$; on peut construire un modèle $\mathfrak{M}$ de façon que pour une certaine coupure irrationnel sur $\mathbb{Q}$ toute réalisation satisfait P. Mais s'il y a un modèle atomique $\mathfrak{M}_0$, il s'injecte dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathfrak{M}$, et toutes les réalisations de cette coupure dans $\mathfrak{M}_0$ satisfont à la fois $\neg P$ et P. Donc il n'y en a pas ; comme on peut repeter avec chaque coupure irrationnel, aucune telle coupure est réalise dans $\mathfrak{M}_0$. Mais $\mathfrak{M}_0$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ et ne réalise que des coupures irrationnelles. Ça signifie que le domaine de $\mathfrak{M}_0$ est $\mathbb{Q}$, et $\mathfrak{M}_0$ ne comporte aucun élément réalisant $\neg P$, contradiction.

Exemple 4.20. $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, 0, +)$ n'a pas de modèle premier. En fait, pour p premier on pose

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n > 0, p \nmid n\}.$$

On montre (par élimination des quanteurs dans un langage avec un predicat pour divisibilité par p, pour tout nombre premier p) que $\bigoplus_p \mathbb{Z}_{(p)}$ est un modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ dans lequel $\mathbb{Z}$ ne se plonge pas. Puisque $\mathbb{Z}$ est minimal, il n'y a pas de modèle premier.

Exercice 4.21. Montrer que si $\mathfrak{M}$ est premier et minimal sur A, alors c'est le seul modèle premier sur A à A-isomorphisme près.

Proposition 4.22. *Toute structure a une extension élémentaire ω-saturée.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{M}$ une structure. On construit une chaîne

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathfrak{M}_i \preccurlyeq \ldots$$

telle que pour tout i, $\mathfrak{M}_{i+1}$ réalise tous les types dans $S_1(M_i)$. Pour cela considérons une énumération $(p_j)_{j \in J}$ des types dans $S_1(M_i)$ et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \bigcup_{j \in J} p_j(c_j)$$

où $(c_j)_{j \in J}$ est une famille de nouvelles constantes. Par compacité Σ est consistant puisque toute partie finie de chaque p_j est réalisée dans $\langle \mathfrak{M}_i, M_i \rangle$.
L'union $\mathfrak{N} := \bigcup \mathfrak{M}_i$ est une extension élémentaire de chaque $\mathfrak{M}_i$; montrons qu'elle est ω-saturée. En effet, si A est une partie finie de N, il existe i tel que $A \subseteq M_i$. Soit p un type dans $S_1(A)$. Il a une complétion dans $S_1(\mathfrak{M}_i)$, qui est réalisé dans $\mathfrak{M}_{i+1}$ par un élément a. Mais alors a réalise p dans $\mathfrak{N}$. □

Exercice 4.23. Pour tout $\mathfrak{M}$ et tout λ il y a une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ qui est λ-saturée.

Exercice 4.24. Si $|\mathcal{L}| \leq \lambda$ et $\lambda^+ = 2^\lambda$, une théorie complète a un modèle saturé de cardinal λ^+.

Le théorème suivant donne une caractérisation fondamentale des théories $\aleph_0$-catégoriques.

Théorème 4.25. Ryll-Nardzewski, Svenonius, Engeler *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une théorie complète dénombrable :*

1. *T est $\aleph_0$-catégorique.*

2. *Tout type dans $S(T)$ est isolé.*
3. *$S_n(T)$ est fini pour chaque $n < \omega$.*
4. *Pour chaque $n < \omega$ il n'y a qu'un nombre fini de formules inéquivalentes modulo T à n variables libres $x_1, \ldots, x_n$.*

Démonstration. 3. $\Leftrightarrow$ 4. Si $S_n(T)$ est fini, on trouve facilement des formules isolant les types dans $S_n(T)$; une formule en n variables libres sera donc équivalente à une combinaison booléenne de ces formules. La réciproque est évidente.
3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1. Si $S_n(T)$ est fini pour chaque n, alors chaque type sur $\emptyset$ est isolé et tout modèle de T est atomique ; par le théorème 4.16 deux modèles dénombrables sont isomorphes.
1. $\Rightarrow$ 2. Si T est ω-catégorique, comme tout type non-isolé sur $\emptyset$ peut être ou bien réalisé ou bien omis dans un modèle dénombrable par le théorème d'omission des types, tout type sur $\emptyset$ est principal.
2. $\Rightarrow$ 3. Pour $n < \omega$ et $p \in S_n(T)$ soit $\varphi_p(\bar{x})$ une formule isolant p. Si $S_n(T)$ est infini, alors par compactité l'ensemble $\{\neg\varphi_p(\bar{x}) : p \in S_n(T)\}$ est consistant et on peut le completer en un type $q(\bar{x})$. Mais $\varphi_q \in q$, une contradiction. □

Exercice 4.26. Montrer qu'une théorie dénombrable complète est $\aleph_0$-catégorique si et seulement si tout modèle dénombrable est ω-saturé.

4.3 Théories menues et modèles dénombrables

Définition 4.27. Une théorie dénombrable est *menue* si $S(T)$ est dénombrable.

Lemme 4.28. *Si T est menue, $\mathfrak{M} \models T$ et $\bar{m}$ est un uple fini de M, alors $S_n(\bar{m})$ est fini pour tout $n < \omega$.*

Démonstration. Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont des uples finis (dans une extension élémentaire $\mathfrak{N}$) et $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{m}) = \mathrm{tp}(\bar{b}\bar{m})$, alors $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{m}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{m})$. □

Proposition 4.29. *Une théorie complète dénombrable a un modèle saturé dénombrable ssi elle est menue.*

Démonstration. Il est évident que la condition est nécessaire, puisqu'un modèle dénombrable n'a qu'un nombre dénombrables d'uples finis, et ne réalise qu'un nombre dénombrable de types. Réciproquement, soit $\mathfrak{M}_0$ un modèle dénombrable d'une théorie T menue, qui réalise tous les types dans $S(T)$ (qui existe puisque tous les types peuvent être réalisés dans un modèle, qu'on peut prendre dénombrable par Löwenheim-Skolem descendant). Pour tout $i < \omega$ soit $\mathfrak{M}_{i+1}$ une extension élémentaire dénombrable de $\mathfrak{M}_i$ qui réalise tous les types sur tous les uples finis de $\mathfrak{M}_i$. Cela existe puisqu'il n'y a qu'un nombre dénombrable d'uples finis dans $\mathfrak{M}_i$, et $S_n(\bar{m})$ est dénombrable pour chaque uple fini $\bar{m}$ et tout $n < \omega$ d'après le lemme 4.28. Soit $\mathfrak{M} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$, une extension élémentaire de chaque $\mathfrak{M}_i$. Alors $\mathfrak{M}$ est dénombrable ; comme tout uple fini de $\mathfrak{M}$ est déjà dans $\mathfrak{M}_i$ pour i suffisamment grand, $\mathfrak{M}$ est ω-saturé, donc saturé. □

Si $\mathfrak{M}$ est une structure dénombrable, alors $\mathfrak{M}$ devient atomique dans l'expansion qui rajoute une constante pour chaque élément de M. On ne peut donc pas caractériser l'existence d'un modèle atomique par une condition sur le cardinal de $S(T)$. Par contre, l'autre direction est vraie.

Lemme 4.30. *Soit T menue. Alors les types isolés sont denses : toute formule peut être complétée en un type complet, sur tout uple fini de paramètres contenant les paramètres de la formule.*

Démonstration. D'après le lemme 4.28 on peut supposer $\bar{m} = \emptyset$. Si $[\varphi(\bar{x})]$ est non-vide et ne contient aucun type isolé, alors pour tout $[\psi(\bar{x})] \subseteq [\varphi(\bar{x})]$ non-vide contient un type isolé. On peut donc récursivement trouver une suite de formules $\varphi_\eta(\bar{x})$ pour $\eta \in 2^{<\omega}$ avec $\phi_\emptyset = \varphi$ et tel que $[\varphi_{\eta\hat{}0}(\bar{x})]$ et $[\varphi_{\eta\hat{}1}(\bar{x})]$ sont non-vides et disjoints dans $\varphi_\eta(\bar{x})$: Comme φ_η n'isole pas de type, il y a deux types $p_0, p_1 \in [\varphi]$ et un formule $\psi \in p_0 \setminus p_1$. Il suffit de prendre $\varphi_{\eta\hat{}0} = \varphi_\eta \wedge \psi$ et $\varphi_{\eta\hat{}1} = \varphi_\eta \wedge_n e\psi$.
Alors pour tout $\eta \in 2^\omega$ les types partiels $\{\varphi_{\eta\restriction n} : n < \omega\}$ sont disjoints, et se complètent en $2^{\aleph_0}$ types de $S(T)$. □

Remarque 4.31. La démonstration ne suppose pas que T soit complète, et $\bar{x} = \emptyset$ est possible. Cependant, dès qu'on parle d'un paramètre $\bar{m}$ issu d'un modèle $\mathfrak{M}$, on se place dans la théorie complète $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$.

Proposition 4.32. *Si T est menue, elle a un modèle atomique dénombrable. Plus précisément, pour tout uple fini $\bar{m}$ dans un modèle $\mathfrak{M}$ de T il y a un modèle dénombrable $\mathfrak{M}_{\bar{m}} \prec \mathfrak{M}$ atomique sur $\bar{m}$.*

Démonstration. D'après le lemme 4.28 on peut supposer $\bar{m} = \emptyset$. On construit récursivement une interprétation de la théorie de Henkin T_H avec constantes $(c_i : i < \omega)$, de manière que $\mathrm{tp}(c_i/c_j : j < i)$ est isolé pour tout $i < \omega$. Cela est possible puisque $\varphi_i(x)$ contient un type isolé. Alors $\{c_i^{\mathfrak{M}} : i < \omega)$ est construit. □

Définition 4.33. Le *spectre* d'une théorie est la fonction $I(T, \kappa)$ qui à un cardinal κ associe le nombre de modèles non-isomorphes de cardinal κ.

$I(T, \aleph_0) = 1$ ssi T est $\aleph_0$-catégorique. Alors se pose la questions des possibles valeurs de $I(T, \aleph_0)$ en fonction de T. On a vu que $I(ACF_p, \aleph_0) = \aleph_0$ en toute caractéristique, les modèles étant déterminés par leur degré de transcendance, qui est $\leq \omega$. Si $T = \mathrm{Th}((\mathbb{Q}, <), \mathbb{Q})$ est la théorie DLO^o avec des constantes pour le modèle dénombrable, alors $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$, car toute coupure sur $\mathbb{Q}$ est réalisé dans un modèle dénombrable, mais un tel modèle ne peut réaliser qu'un nombre dénombrable de coupures. Par ailleurs, c'est la valeur maximale, car si M est un ensemble dénombrable, il y a au plus $\aleph_0^{n+1} = \aleph_0$ manières pour y interpreter une relation $(n + 1)$-aire ou une fonction n-aire, et au plus $\aleph_0^{|\mathcal{L}|} \leq 2^{\aleph_0}$ manières pour en faire un modèle de T.

Lemme 4.34. *Si $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, alors T est menue.*

Démonstration. On montre que si $S(T) > \aleph_0$ alors $S(T) = 2^{\aleph_0}$. Comme tout type dans $S(T)$ est réalisé dans un modèle dénombrable, mais un tel modèle ne réalise que $\aleph_0$ types dans $S(T)$, cela implique $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$, car deux modèles isomorphes réalisent les mêmes types sur $\emptyset$.
On rappelle que la *dérivée* X' d'un espace topologique X est X privé de ses points isolés, avec la topologie induite. Pour un ordinal α on pose $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, et pour un ordinal limite λ on pose $X^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^{(\alpha)}$. Il y a alors un ordinal α tel que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)} = X^{(\infty)}$.
Comme chaque formule isole au plus un point de $S_n(T)$ (modulo la dérivée précédente), et que tout point de $S_n(T) \setminus S_n(T)^{[\infty)}$ est isolé par une formule (modulo la dérivée précédente), on a $|S_n(T)| \leq \aleph_0 + |S_n(T)^{(\infty)}|$. En particulier, si $S_n(T)$ n'est pas dénombrable, $S_n(T)^{[\infty)}$ non plus. Mais tout ouvert-fermé $[\varphi]$ qui contient un point p de $S_n(T)^{[\infty)}$ en contient plusieurs, car sinon p serait dans la prochaine dérivée. On peut donc trouver une formule ψ telle que $[\varphi \wedge \psi]$ et $[\varphi \wedge \neg\psi]$ contiennent tous les deux un point de $S_n(T)^{[\infty)}$; comme $S_n(T)^{[\infty)}$ est non-vide, on démarre avec $[\bar{x} = \bar{x}] = S_n(T)$ et on construit un arbre binaire avec branches consistants. Ainsi $S_n(T) = 2^{\aleph_0}$. □

Exemple 4.35. Soit $\mathcal{L} = \{<, c_i : i < \omega\}$ et $T = \mathrm{DLO}^o \cup \{c_i < c_{i+1} : i < \omega\}$. C'est une expansion par constantes d'une théorie avec élimination des quanteurs ; elle élimine donc elle-même les quanteurs, et on voit facilement qu'elle est complète. Elle a trois modèles en fonction de la valeur de $\lim_i c_i$: on peut avoir $\lim_i c_i = \infty$, donc les c_i sont cofinal dans le modèle, ou bien $\lim_i c_i$ est rationel, donc dans le modèle, ou bien $\lim_i c_i$ est une coupure irrationnelle.

Exemple 4.36. Plus généralement, pour $n \geq 3$ soit T_n l'expansion de la théorie précédente par $n-2$ relations unaires $(P_j : j < n-2)$ qui partitionnent le domaine, telle que $c_i \in P_0$ pour tout $i < \omega$. Alors les cas ou $\lim_i c_i$ est dans le modèle se scinde en $n-2$ cas en fonction du j tel que $\lim_i c_i \in P_j$. Ainsi $I(T_n, \aleph_0) = n$.

Théorème 4.37. $I(T, \aleph_0) \neq 2$.

Démonstration. Si $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, alors T est menue d'après le lemme 4.34, et a un modèle atomique et un modèle saturé, d'après les propositions 4.32 et 4.29. Si T n'est pas $\aleph_0$-catégorique, il y a un type non-isolé, et le modèle atomique n'est pas isomorphe au modèle saturé. Il nous faut trouver un modèle intermédiaire, non-isomorphe aux deux.
Soit $\bar{n}$ la réalisation d'un type non-isolé, et $\mathfrak{M}$ un modèle dénombrable atomique (donc premier et construit) sur $\bar{m}$, qui existe d'après la proposition 4.32. Alors $\mathfrak{M}$ n'est pas atomique puisqu'il contient $\bar{m}$. Mais comme T n'est pas $\aleph_0$-catégorique, il y a $n < \omega$ tel qu'il y a une infinité de formules en n variables libres inéquivalentes modulo T ; ces formules restent inéquivalentes modulo $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$, et $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{m})$ n'est pas $\aleph_0$-catégorique. Mais $\mathfrak{M}$ en est un modèle atomique, qui donc n'est pas saturé. Mais cela implique que $\mathfrak{M}$ n'est pas saturé en tant que modèle de T non plus. □

Conjecture 4.38 (Vaught)**.** Si $I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$, alors $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$.

Index

Bibliographie

[Ho] W. Hodges. *A shorter Model Theory.* Cambridge, 1997.

[Po] B. Poizat. *Un cours de théorie des modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985. Traduction anglaise : *A course in Model Theory.* Springer Verlag, Heidelberg, 2000.

[TZ] K. Tent et M. Ziegler. A course in Model Theory. Lecture Notes in Logic 40, ASL, Cambridge, 2012.