

# Notions de base en théorie des modèles

Frank Wagner

December 17, 2009

# Chapitre 1

## Langage et structure

En théorie des modèles on n'analyse pas une seule structure, comme les entiers où les complexes, mais on prend une *classe* de structures, et on cherche à déterminer les propriétés communes des structures dans cette classe. En général, une telle classe est aussi déterminée par des propriétés, comme par exemple la classe des corps, ou la classe des groupes abéliens. Parlons donc des propriétés.

Pour exprimer une propriété, il nous faut d'abord un langage.

**Définition 1.1** Un *langage*  $\mathcal{L}$  est l'union (disjointe) d'un ensemble  $\mathcal{C}$  de symboles de constantes, d'un ensemble  $\mathcal{F}$  de symboles de fonctions, et d'un ensemble  $\mathcal{R}$  de symboles de relations. A chaque  $f \in \mathcal{F}$  et chaque  $R \in \mathcal{R}$  est associé un entier, l'*arité*, qui indique le nombre d'arguments.

En plus, on aura les variables, qui seront notés  $x, y, z, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots$

**Remarque 1.2** Une fonction d'arité 0 est une constante. Il y a deux relations d'arité 0 : la relation  $\top$  qui est toujours vraie, et la relation  $\perp$  qui est toujours fausse.

**Exemple 1.3** 1. Le langage des ordres  $\mathcal{L}_{ord}$  ne contient ni constantes ni fonctions, mais deux relations binaires  $=$  et  $<$ .

2. Le langage des groupes  $\mathcal{L}_{gp}$  contient une constante 1, une fonction unaire  $^{-1}$ , une fonction binaire  $*$ , et une relation binaire  $=$ .

3. Le langage  $\mathcal{L}_{ann}$  des anneaux contient trois fonctions binaires (d'arité deux)  $+$ ,  $-$  et  $*$ , une relation binaire  $=$ , et deux constantes 0 et 1.

On utilise ce langage pour former des mots et des phrases.

**Définition 1.4** Soit  $\mathcal{L}$  un langage. La collection des  $\mathcal{L}$ -termes est défini récursivement par :

- toute constante et toute variable est un  $\mathcal{L}$ -terme.
- si  $f \in \mathcal{F}$  est une fonction  $n$ -aire et  $t_1, \dots, t_n$  sont des  $\mathcal{L}$ -termes, alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un  $\mathcal{L}$ -terme.

Une  $\mathcal{L}$ -formule atomique est une expression de la forme  $R(t_1, \dots, t_n)$ , où  $R \in \mathcal{R}$  est une relation  $n$ -aire et  $t_1, \dots, t_n$  sont des  $\mathcal{L}$ -termes. La collection des  $\mathcal{L}$ -formules est défini récursivement par :

- une  $\mathcal{L}$ -formule atomique est une  $\mathcal{L}$ -formule.
- si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des  $\mathcal{L}$ -formules, leurs *combinaisons booléennes* ( $\varphi \wedge \psi$ ) (*conjonction, et*), ( $\varphi \vee \psi$ ) (*disjonction, ou*) et  $\neg\varphi$  (*négation, non*) sont des  $\mathcal{L}$ -formules.
- si  $\varphi$  est une  $\mathcal{L}$ -formule et  $x$  est une variable, les *quantifications*  $\forall x\varphi$  (*universelle, quel que soit*) et  $\exists x\varphi$  (*existentielle, il y a*) sont des  $\mathcal{L}$ -formules. Les occurrences de la variable  $x$  dans ces formules sont *liées* à ce quanteur  $\forall$  ou  $\exists$  (sauf si elles sont déjà liées à un quanteur dans  $\varphi$ ). Une variable qui n'est pas liée est *libre*.

Un *énoncé*, ou une *formule close*, est une formule sans variable libre ; une formule *positive* est une formule sans négation.

**Exemple 1.5** 1. Les seuls termes de  $\mathcal{L}_{ord}$  sont les variables ; les  $\mathcal{L}_{ord}$ -formules atomiques sont les égalités et les inégalités.

2. Parmi les termes de  $\mathcal{L}_{gp}$ , il y a les produits des variables et leurs inverses (le produit vide étant égale à 1) ; en effet, modulo les lois de groupe chaque terme est équivalent à un tel produit. Donc les  $\mathcal{L}_{gp}$ -formules atomiques sont les équations.
3. Parmi les termes de  $\mathcal{L}_{ann}$ , il y a les polynômes (en plusieurs variables) à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , où l'entier  $n$  est une abbréviation pour  $1 + \dots + 1$  (somme de  $n$  fois 1), et  $x^n$  dénote  $x * \dots * x$  (produit de  $n$  fois  $x$ ) ; dans un anneau commutatif tout terme est équivalent à un tel polynôme. Donc, dans un anneau commutatif, les  $\mathcal{L}_{ann}$ -formules atomiques sont les équations polynômiales.

**Lemme 1.6** [LECTURE UNIQUE]

1. Soit  $t$  un  $\mathcal{L}$ -terme. Alors soit  $t$  est une constante ou une variable (uniquement déterminée), soit il y a une fonction  $f$  d'arité  $n$ , et des  $\mathcal{L}$ -termes  $t_1, \dots, t_n$ , uniquement déterminés, tels que  $t$  est  $f(t_1, \dots, t_n)$ .
2. Soit  $\varphi$  une  $\mathcal{L}$ -formule. Alors  $\varphi$  tombe dans un (et un seul) des cas suivants :
  - (a)  $\varphi$  est atomique et il y a une relation  $R$  d'arité  $n$ , et des  $\mathcal{L}$ -termes  $t_1, \dots, t_n$ , uniquement déterminés, tels que  $\varphi$  est  $R(t_1, \dots, t_n)$ ,
  - (b) Il y a une formule  $\psi$  uniquement déterminée telle que  $\varphi$  est  $\neg\psi$ .
  - (c) Il y a deux formules  $\psi_1$  et  $\psi_2$  uniquement déterminées telles que  $\varphi$  est  $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ .
  - (d) Il y a deux formules  $\psi_1$  et  $\psi_2$  uniquement déterminées telles que  $\varphi$  est  $(\psi_1 \vee \psi_2)$ .
  - (e) Il y a une formule  $\psi$  et une variable  $x$  uniquement déterminées telles que  $\varphi$  est  $\exists x\psi$ .
  - (f) Il y a une formule  $\psi$  et une variable  $x$  uniquement déterminées telles que  $\varphi$  est  $\forall x\psi$ .

DÉMONSTRATION:

1. Par récurrence sur le nombre d'étapes dans la construction d'un terme (que l'on ne suppose pas encore unique) on se rend compte que dans un terme
  - il y a le même nombre de “(” que de “)”, et
  - toute virgule “,” est précédée par plus de “(” que de “)”.

Notons qu'un terme formé par itération comporte au moins les deux parenthèses, donc est de longueur au moins deux. Donc, si  $t$  est un mot de longueur un (un seul symbole),  $t$  est soit une constante, soit une variable, qui est évidemment uniquement déterminée. Si  $t$  est de longueur supérieure à un,  $t$  n'est ni constante ni variable. Donc  $t$  est créé itérativement ; le premier symbole de  $t$  est une fonction  $f \in \mathbb{F}$ , déterminée uniquement, d'une certaine arité  $n$ . Comme  $t$  est un terme, il y a des termes  $t_1, \dots, t_n$  tels que  $t$  est  $f(t_1, \dots, t_n)$ . Supposons donc

que cette lecture n'est pas unique, qu'il y a d'autres termes  $s_1, \dots, s_n$  tels que  $t$  se lit aussi  $f(s_1, \dots, s_n)$ . Si  $s_1$  n'est pas le même que  $t_1$ , alors soit  $s_1$  est un segment initial propre de  $t_1$ , soit  $t_1$  en est un de  $s_1$ . Donc soit  $t_1$  est  $s_1, \dots$ , soit  $s_1$  est  $t_1, \dots$  ; dans les deux cas la virgule est précédée par autant de "(" que de ")", une contradiction. Donc  $t_1$  est le même que  $s_1$ , et on peut répéter avec  $t_2$  et  $s_2$ , ensuite  $t_3$  et  $s_3$ , etc.

2. Par récurrence sur le nombre d'étapes dans la construction d'une formule (que l'on ne suppose pas encore unique) on se rend compte que dans une formule

- il y a le même nombre de "(" que de ")", et
- tout "∧" et tout "∨" est précédée par plus de "(" que de ")",

Si une formule  $\varphi$  commence par une négation "¬", on est forcément dans le cas (b), et  $\varphi$  est de la forme  $\neg\psi$ , où  $\psi$  est la formule obtenue en supprimant le premier symbole "¬".

Si  $\varphi$  commence par un quanteur "∃" ou "∀", on est dans le cas (e) ou (f) ; le second symbole est la variable, et le reste la formule  $\psi$ .

Si  $\varphi$  commence par un symbole de relation  $R \in \mathbb{R}$ , elle est atomique ; si  $n$  est l'arité de  $R$ , il existe  $n$  termes  $t_1, \dots, t_n$  tels que  $\varphi$  est  $R(t_1, \dots, t_n)$ . L'unicité de ces termes se montre comme pour la lecture unique des termes.

Si  $\varphi$  commence par une parenthèse "(", on est dans le cas (c) ou (d). Supposons par exemple que  $\varphi$  se lit à la fois  $(\psi_1 \wedge \psi_2)$  et  $(\psi'_1 \wedge \psi'_2)$ , où  $\psi_1$  est un segment initial propre de  $\psi'_1$ . Donc  $\psi'_1$  est  $\psi_1 \wedge \dots$ , et la virgule est précédée par autant de "(" que de ")", une contradiction. Alors  $\psi_1$  est  $\psi'_1$ , le prochain symbole est le connecteur booléen ( $\wedge$  ou  $\vee$ , uniquement déterminée), et le reste (sauf la parenthèse finale) est  $\psi_2$ . Les autres cas sont analogues. ■

Maintenant que l'on a fixé la syntaxe, il nous faut des objets.

**Définition 1.7** Soit  $\mathcal{L}$  un langage. Une  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{M}$  est un ensemble  $M$ , le *domaine* de  $\mathfrak{M}$  (souvent confondu avec  $\mathfrak{M}$ ), et

- pour chaque symbole  $c \in \mathcal{C}$  un élément  $c^{\mathfrak{M}} \in M$ .
- pour chaque symbole  $f \in \mathcal{F}$  d'arité  $n$  une fonction  $f^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$ .

- pour chaque symbole  $R \in \mathcal{R}$  d'arité  $n$  un sous-ensemble  $R^{\mathfrak{M}}$  de  $M^n$ .

**Définition 1.8** Soit  $\mathcal{L}$  une langage, et  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure. Si  $\bar{m}$  est un uple d'éléments de  $M$  et  $\bar{x}$  est un uple de variables (de la même longueur) dans un terme  $t(\bar{x})$ , on peut substituer  $\bar{m}$  pour toutes les occurrences de  $\bar{x}$  dans  $t$  et obtenir un terme  $t(\bar{m})$ , un terme à *paramètres*  $\bar{m}$ . Nous allons définir l'*interprétation*  $t^{\mathfrak{M}}$  d'un terme  $t$  à paramètres dans  $\mathfrak{M}$  *clos* (sans variable) récursivement par :

- l'interprétation d'une constante  $c$  est  $c^{\mathfrak{M}}$  ; l'interprétation d'un paramètre  $m$  est  $m$ .
- si  $f \in \mathcal{F}$  est une fonction  $n$ -aire et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes à paramètres, alors  $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}})$ .

Donc l'interprétation associe à chaque terme clos (avec paramètres) un élément de  $M$ .

De même, pour une formule  $\varphi(\bar{x})$ , on peut substituer  $\bar{m}$  pour toutes les occurrences *libres* de  $\bar{x}$  dans  $\varphi$  et obtenir une formule  $\varphi(\bar{m})$  avec paramètres. (Par unicité de lecture, la liberté d'une variable est uniquement déterminée.) Nous allons définir la *satisfaction* d'une formule close avec paramètres dans  $\mathfrak{M}$  récursivement par :

- si  $\varphi(\bar{m})$  est  $R(t_1(\bar{m}), \dots, t_n(\bar{m}))$  est une formule atomique, où  $R \in \mathcal{R}$  est une relation  $n$ -aire et  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes, alors  $\varphi(\bar{m})$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$  si  $(t_1(\bar{m})^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n(\bar{m})^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}}$ .
- si  $\varphi$  est  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ , alors  $\varphi$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$  si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont satisfaites dans  $\mathfrak{M}$ .
- si  $\varphi$  est  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ , alors  $\varphi$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$  si  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$  (ou bien les deux) est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$ .
- si  $\varphi$  est  $\neg\psi$ , alors  $\varphi$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$  si  $\psi$  n'est pas satisfaite dans  $\mathfrak{M}$ .
- si  $\varphi$  est  $\forall x\psi(x)$ , alors  $\varphi$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$  si pour tout  $m \in M$  la formule  $\psi(m)$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$ .
- si  $\varphi$  est  $\exists x\psi(x)$ , alors  $\varphi$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$  s'il y a un  $m \in M$  tel que  $\psi(m)$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$ .

Si  $\varphi(\bar{m})$  est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$ , on le dénote par  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$  ; on dit aussi que  $\varphi(\bar{m})$  est *vrai* dans  $\mathfrak{M}$ , ou que  $\mathfrak{M}$  *satisfait*  $\varphi(\bar{m})$ .

**Remarque 1.9** C'est cette définition de la satisfaction qui donne le sens usuel au connecteurs booléens et au quanteurs. Avant, ce n'étaient que des symboles manipulés de manière purement syntaxique. Notons également que la définition est possible grâce au lemme d'unicité de lecture.

On peut aussi voir les choses de l'autre côté : si  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ , on dit également que  $\bar{m}$  satisfait  $\varphi(\bar{x})$  dans  $\mathfrak{M}$ , et on écrit  $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \varphi(\bar{x})$ . Souvent on confond  $f$  et  $f^{\mathfrak{M}}$ ,  $R$  et  $R^{\mathfrak{M}}$ , et  $c$  et  $c^{\mathfrak{M}}$ . Donc, dans un anneau  $R$ , on parlera de  $+$ ,  $-$ ,  $*$ , et pas de  $+^R$ ,  $-^R$ ,  $*^R$ .

**Convention 1.10** *Dans ce cours, l'égalité = fera partie de tous les langages, et sera toujours interprétée par la vraie égalité. (Si = n'est pas interprété par la vraie égalité, mais on considère une structure où les axiomes habituels de l'égalité sont satisfaits — qu'elle soit une congruence pour toutes les fonctions et relations —, alors on pourra quotienter par = ; comme c'est une congruence, ça nous induit une  $\mathcal{L}$ -structure sur l'ensemble des classes modulo =, qu'on peut substituer pour la structure originale.)*

**Exemple 1.11** 1. Considérons une  $\mathcal{L}_{ord}$ -structure  $\mathfrak{M}$  satisfaisant :

- (a)  $\forall x \neg x < x$ .
- (b)  $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$ .
- (c)  $\forall x \forall y \forall z \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$ .

Alors la relation  $<^{\mathfrak{M}}$  est anti-réflexive, totale, et transitive, donc un ordre total. L'ordre est sans extrémité si  $\mathfrak{M}$  satisfait

$$\forall x \exists y \exists z (y < x \wedge x < z) ;$$

il est dense si  $\mathfrak{M}$  satisfait

$$\forall x \forall y ((x = y \vee y < x) \vee \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

2. Considérons une  $\mathcal{L}_{gp}$ -structure  $\mathfrak{M}$ . Elle est un groupe si elle satisfait :

- (a)  $\forall x (x * 1 = x \wedge 1 * x = x)$ .

- (b)  $\forall x (x * x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} * x = 1)$ .
- (c)  $\forall x \forall y \forall z x * (y * z) = (x * y) * z$ .

Le groupe est abélien si  $\forall x \forall y x * y = y * x$  est vrai.

3. Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}_{ann}$ -structure. Elle est un corps (commutatif) si

- (a)  $(M, 0, +^{\mathfrak{M}})$  est un groupe abélien. (Qu'est-ce qu'on fait pour l'inverse ?)
- (b)  $(M - \{0\}, 1, *^{\mathfrak{M}})$  est un groupe abélien. (Comment dire ça par un énoncé ?)
- (c)  $\forall x \forall y \forall z x * (y + z) = x * y + x * z$ .

Si  $\Phi$  est un ensemble d'énoncés et  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure, on écrit  $\mathfrak{M} \models \Phi$  si  $\mathfrak{M} \models \varphi$  pour tout  $\varphi \in \Phi$  ; on dit que  $\mathfrak{M}$  satisfait  $\Phi$ , que  $\mathfrak{M}$  réalise  $\Phi$ , ou bien que  $\mathfrak{M}$  est un *modèle* de  $\Phi$ .

**Définition 1.12** Soient  $\varphi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  deux  $\mathcal{L}$ -formules. On dit que  $\varphi(\bar{x})$  implique  $\psi(\bar{x})$  si pour tout  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{M}$  et tout  $\bar{m} \in M$ , si  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ , alors  $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m})$ .

Deux formules  $\varphi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  sont *équivalentes* si  $\varphi$  implique  $\psi$  et  $\psi$  implique  $\varphi$ .

On a la même définition pour des ensembles  $\Phi(\bar{x})$  et  $\Psi(\bar{x})$  de  $\mathcal{L}$ -formules.

**Lemme 1.13** Pour toutes  $\varphi$  et  $\psi$ , les formules suivantes sont équivalentes :

- $\varphi$  et  $\neg\neg\varphi$ .
- $\neg(\varphi \wedge \psi)$  et  $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ , ainsi que  $\neg(\varphi \vee \psi)$  et  $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$  (DE MORGAN).
- $\forall x \neg\varphi$  et  $\neg\exists x \varphi$ , ainsi que  $\exists x \neg\varphi$  et  $\neg\forall x \varphi$ .

DÉMONSTRATION: Par exemple, pour toute  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{M}$  et tout  $\bar{m}$  dans  $\mathfrak{M}$  on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models \neg\neg\varphi(\bar{m}) &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \neg\varphi(\bar{m}) \\
&\Leftrightarrow \text{il n'est pas vrai que } \mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{m}) \\
&\Leftrightarrow \text{il n'est pas vrai que } \mathfrak{M} \not\models \varphi(\bar{m}) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Corollaire 1.14** Toute formule est équivalente à une formule qui n'utilise qu'un des deux connecteurs booléens, et qu'un des deux quanteurs.

DÉMONSTRATION: Grâce au Lemme 1.13 on élimine itérativement un des connecteurs et un des quanteurs. ■

Nous utiliserons aussi les abbréviations suivantes :  $(\varphi \rightarrow \psi)$  pour  $(\neg\varphi \vee \psi)$ , et  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$  pour  $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ . On doit faire attention : ces connecteurs cachent des négations, et sont interdits dans les formules positives.

**Exercice 1.15** Deux formules  $\varphi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  sont équivalentes si et seulement si  $\forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$  est vrai dans toute  $\mathcal{L}$ -structure.

**Exercice 1.16** Dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs arguments,  $\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_n$  ou  $\varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_n$ , tout choix des parenthèses donne une formule équivalente.

A partir d'ici on va supprimer les parenthèses superflues. On notera  $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$  une conjonction  $\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ , et  $\bigvee_{i \leq n} \varphi_i$  une disjonction  $\varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_n$ .

**Définition 1.17** Une formule est *prénexe* si elle est de la forme

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi,$$

où  $Q_i \in \{\exists, \forall\}$  pour tout  $i \leq n$ , et  $\varphi$  ne contient pas de quanteur.

**Exercice 1.18** Toute formule est équivalente à une formule prénexe.

**Définition 1.19** Soient  $\{\varphi_i : i < n\}$  des formules, et  $\varphi$  une combinaison booléenne des  $\varphi_i$ . Alors  $\varphi$  est en *forme disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de formules  $\varphi_i$  ou  $\neg\varphi_i$ ; elle est en *forme conjonctive* si elle est une conjonction de disjonctions de formules  $\varphi_i$  ou  $\neg\varphi_i$ . La forme est *normale* si chaque conjonction/disjonction contient tous les  $\{\varphi_i : i < n\}$  précisément une fois, soit positivement, soit en négation.

**Exercice 1.20** Toute combinaison booléenne des formules  $\{\varphi_i : i < n\}$  est équivalente à une forme disjonctive normale (où la disjonction vide est équivalente à la formule  $\perp$ ), et également à une forme conjonctive normale (où la conjonction vide est équivalente à la formule  $\top$ ).

## Chapitre 2

# Equivalence élémentaire et sous-structures élémentaires

**Définition 2.1** Une  $\mathcal{L}$ -théorie  $T$  est un ensemble *consistant* de  $\mathcal{L}$ -énoncés (qui a un modèle) ; elle est *complète* si pour chaque énoncé  $\varphi$  soit tout modèle de  $T$  satisfait  $\varphi$ , soit tout modèle satisfait  $\neg\varphi$ .

Donc une  $\mathcal{L}$ -théorie est complète si et seulement si pour tout  $\mathcal{L}$ -énoncé  $\varphi$ , soit  $T \models \varphi$ , soit  $T \models \neg\varphi$ .

**Convention 2.2** Conformément à notre convention sur l'égalité, les axiomes habituels sur  $=$  feront partie de toute théorie.

Si  $\mathfrak{M}$  est une  $\mathcal{L}$ -structure et  $A$  un ensemble d'éléments dans  $M$ , la  $\mathcal{L}(A)$ -théorie de  $\mathfrak{M}$ , notée  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ , est l'ensemble de tous les énoncés à paramètres dans  $A$  qui sont satisfaits par  $\mathfrak{M}$ . Il est évident que c'est une théorie complète. On pose  $\text{Th}(\mathfrak{M}) := \text{Th}(\mathfrak{M}, \emptyset)$ .

**Exemple 2.3** 1. La théorie des ordres denses sans extrémité est une  $\mathcal{L}_{ord}$ -théorie complète.

2. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion est une  $\mathcal{L}_{gp}$ -théorie complète. Elle est donnée par la théorie des groupes abéliens, plus

- $\forall x \exists y y * \cdots * y = x$  (produit de  $n$  fois  $y$ ), pour tout entier  $n > 0$ .
- $\forall x (x = 1 \vee \neg x * \cdots * x = 1)$  (produit de  $n$  fois  $x$ ), pour tout entier  $n > 0$ .

3. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  fixe est une théorie complète ; elle est donnée par les énoncés suivants :
  - (a) Les axiomes des corps (commutatifs).
  - (b) Soit  $p = 0$ , en caractéristique  $p > 0$ , soit  $n \neq 0$  pour tout  $n \in \omega$ , en caractéristique 0.
  - (c)  $\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x x^n + y_1 x^{n-1} + \dots + y_n = 0$ , pour tout  $n > 0$ .

On notera que les axiomes (a) et (b) donnent la théorie des corps de caractéristique  $p$ , qui est axiomatisable par un seul axiome si et seulement si  $p > 0$ . Les axiomes (a) et (c) forment la théorie *ACF* des corps algébriquement clos ; (c) ne s'exprime pas par un nombre fini d'énoncés. Finalement, (a)–(c) axiomatisent la théorie *ACF<sub>p</sub>* des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ .

Le maximum que l'on peut dire dans notre langage d'une structure est sa théorie ; nous verrons plus tard que sauf si  $\mathfrak{M}$  est fini, il est impossible que  $\text{Th}(\mathfrak{M})$  caractérise  $\mathfrak{M}$  à isomorphisme près. Donc, on définit :

**Définition 2.4** Deux  $\mathcal{L}$ -structures  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont *élémentairement équivalentes*, ce qui est noté  $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ , si elles satisfont les mêmes énoncés.

- Exemple 2.5**
1.  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$  et  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Z}^2, <_{lex} \rangle$ , où  $<_{lex}$  est l'ordre lexicographique. Par contre,  $\langle \mathbb{N}, < \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, < \rangle$  ; l'énoncé  $\exists x \neg \exists y y < x$  est vrai dans  $\mathbb{N}$  mais faux dans  $\mathbb{Z}$ .
  2.  $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \equiv \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \bar{0}, + \rangle$ , mais  $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}^+, 1, * \rangle$  : l'énoncé  $\forall x \exists y y + y = x$  est faux dans  $\mathbb{Z}$ , mais vrai dans  $\mathbb{R}^+$ .
  3. Soit  $\tilde{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors  $\langle \tilde{\mathbb{Q}}, 0, 1, +, -, * \rangle \equiv \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, -, * \rangle$  et  $\langle \tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle$ . Par contre,  $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, -, * \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}(x), 0, 1, +, -, * \rangle$  ; l'énoncé  $\forall x \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2] = x^2$  est vrai dans  $\mathbb{Q}$ , mais faux dans  $\mathbb{Q}(x)$ .

**Exercice 2.6** Deux  $\mathcal{L}$ -structures  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont élémentairement équivalentes si et seulement si  $\text{Th}(\mathfrak{M}) = \text{Th}(\mathfrak{N})$ .

**Définition 2.7** Soit  $\mathfrak{N}$  une  $\mathcal{L}$ -structure. Une  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{M}$  est une *sous-structure* de  $\mathfrak{N}$ , notée  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , si

- $M \subseteq N$  ;
- $c^M = c^N$  pour tout  $c \in \mathcal{C}$  ;
- $f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \upharpoonright_{M^n}$  pour tout  $f \in \mathcal{F}$   $n$ -aire, et tout  $n < \omega$  ; et
- $R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \cap M^n$  pour tout  $R \in \mathcal{R}$   $n$ -aire, et tout  $n < \omega$ .

$\mathfrak{M}$  est une sous-structure *élémentaire* de  $\mathfrak{N}$  si pour toute énoncé  $\varphi(\bar{m})$  à paramètres dans  $\mathfrak{M}$  on a  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$  si et seulement si  $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m})$ . On dénote cette condition par  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ .

Si  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ , on dit que  $\mathfrak{N}$  est une *extension élémentaire* de  $\mathfrak{M}$ .

**Remarque 2.8** Si  $M \subseteq N$  est un ensemble qui contient les constantes et est clos par toutes les fonctions, alors les restrictions à  $M$  des relations de  $\mathfrak{N}$  y induisent une  $\mathcal{L}$ -sous-structure  $\mathfrak{M}$ .

**Exemple 2.9** 1.  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, < \rangle$  et  $\langle \{0\} \times \mathbb{Z}, <_{lex} \rangle \preceq \langle \mathbb{Z}^2, <_{lex} \rangle$ . Par contre,  $\langle 2\mathbb{Z}, < \rangle \not\preceq \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ ; l'énoncé  $\exists x (0 < x \wedge x < 2)$  est faux dans  $2\mathbb{Z}$  mais vrai dans  $\mathbb{Z}$ .

2.  $\langle \mathbb{Z} \oplus \{0\}, \bar{0}, + \rangle \preceq \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \bar{0}, + \rangle$ , mais  $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle \not\preceq \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$  : l'énoncé  $\exists x x + x = 2$  est faux dans  $2\mathbb{Z}$ , mais vrai dans  $\mathbb{Z}$ .

3.  $\langle \tilde{\mathbb{Q}}, 0, 1, +, -, * \rangle \preceq \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, -, * \rangle$  et  $\langle \tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle$ . Par contre,  $\langle \mathbb{Q}(x^2), 0, 1, +, -, * \rangle \not\preceq \langle \mathbb{Q}(x), 0, 1, +, -, * \rangle$  ; l'énoncé  $\exists y y * y = x^2$  est faux dans  $\mathbb{Q}(x^2)$ , mais vrai dans  $\mathbb{Q}(x)$ .

**Définition 2.10** Un  $\mathcal{L}$ -morphisme d'une  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{M}$  dans une  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{N}$  est une application  $\sigma$  de  $M$  dans  $N$  qui préserve les constantes, les fonctions, et les relations. Donc :

1.  $\sigma(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$  pour tout  $c \in \mathcal{C}$ .
2.  $\sigma(f^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$  pour tout  $f \in \mathcal{F}$  et  $\bar{m} \in M$ .
3.  $\bar{m} \in R^{\mathfrak{M}}$  si et seulement si  $\sigma(\bar{m}) \in R^{\mathfrak{N}}$ , pour tout  $R \in \mathcal{R}$  et  $\bar{m} \in M$ .

Un  $\mathcal{L}$ -morphisme  $\sigma : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  est *élémentaire* si pour tout  $\mathcal{L}(M)$ -énoncé  $\varphi(\bar{m})$  on a  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$  si et seulement si  $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$ . Si  $A \subseteq M$  et  $\sigma(A) = B \subseteq N$ , on dit que  $(\mathfrak{M}, A)$  et  $(\mathfrak{N}, B)$  sont *élémentairement équivalents*, noté  $(\mathfrak{M}, A) \equiv (\mathfrak{N}, B)$ .

Un  $\mathcal{L}$ -isomorphisme est un  $\mathcal{L}$ -morphisme surjectif.

**Lemme 2.11** 1. Un  $\mathcal{L}$ -morphisme est injectif.

2. Un  $\mathcal{L}$ -morphisme préserve les formules sans quanteurs.

3. Un  $\mathcal{L}$ -isomorphisme est bijectif et élémentaire.

DÉMONSTRATION:

1. Si  $\sigma(m) = \sigma(m')$  pour  $m, m' \in M$ , alors  $m = m'$  par préservation de la relation  $=$ .
2. Par récurrence sur le nombre des opérations booléennes.
3. Par récurrence sur le nombre des symboles logiques. Par 1. et 2. un  $\mathcal{L}$ -isomorphisme est bijectif et préserve les formules atomiques. Le cas des opérations booléennes étant trivial, on considère une formule de la forme  $\exists x \varphi(x, \bar{m})$  vraie dans  $\mathfrak{M}$ . Donc il y a  $m_0 \in M$  tel que  $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ , et par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(m_0), \sigma(\bar{m}))$ , d'où  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$ . Réciproquement, si  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$ , il y a  $n_0 \in N$  tel que  $\mathfrak{N} \models \varphi(n_0, \sigma(\bar{m}))$ ; par surjectivité on trouve  $m_0 \in M$  avec  $n_0 = \sigma(m_0)$ . Par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(m_0), \sigma(\bar{m}))$  implique  $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ , d'où  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ . Le cas d'un quanteur universel est analogue (ou bien on remplace  $\forall x$  par  $\neg \exists x \neg$ ). ■

**Exercice 2.12** Un  $\mathcal{L}$ -morphisme préserve les quanteurs existentiels de la gauche à la droite, et les quanteurs universels de la droite à la gauche.

**Exercice 2.13** Soient  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  des  $\mathcal{L}$ -structures avec  $M \subseteq N$ . Alors  $\mathfrak{M}$  est une  $\mathcal{L}$ -sous-structure de  $\mathfrak{N}$  si et seulement si l'injection canonique est un  $\mathcal{L}$ -morphisme.

**Exercice 2.14** Soit  $\mathfrak{M}$  une sous-structure de  $\mathfrak{N}$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ .
- $\text{Th}(\mathfrak{M}, M) = \text{Th}(\mathfrak{N}, M)$ .
- l'inclusion  $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  est un  $\mathcal{L}$ -morphisme élémentaire.

**Exercice 2.15** Soient  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$  des  $\mathcal{L}$ -structures.

1. Si  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}'$ , alors  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}'$ .
2. Si  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}'$  et  $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}'$ , alors  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ .

Trouver un exemple avec  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}'$ ,  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ , mais  $\mathfrak{N} \not\preceq \mathfrak{N}'$ .

**Définition 2.16** Soient  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  deux  $\mathcal{L}$ -structures. Un *isomorphisme partiel* de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{N}$  est une application partielle  $\sigma$  de  $M$  dans  $N$  telle que pour toute  $\mathcal{L}(\text{dom}(\sigma))$ -formule atomique  $\varphi(\bar{m})$  on a  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$ . L'isomorphisme partiel est *élémentaire* si pour toute  $\mathcal{L}(\text{dom}(\sigma))$ -formule  $\varphi(\bar{m})$  on a  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$ .

Une famille  $\mathcal{F}$  non-vide d'isomorphismes partiels entre  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  est *karpienne* si pour tout  $\sigma \in \mathcal{F}$  et

- (va) pour tout  $m \in M$  il y a  $\tau \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma$  avec  $m \in \text{dom}(\tau)$ , et
- (vient) pour tout  $n \in N$  il y a  $\tau \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma$  avec  $n \in \text{im}(\tau)$ .

**Proposition 2.17** Soient  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  deux  $\mathcal{L}$ -structure,  $A \subseteq M$  et  $B \subseteq N$ . S'il y a une famille karpienne  $\mathcal{F}$  d'isomorphismes partiels prolongeant une bijection  $\sigma : A \rightarrow B$ , alors  $(\mathfrak{M}, A) \equiv (\mathfrak{N}, B)$ .

**DÉMONSTRATION:** On montre par récurrence que pour tout  $\mathcal{L}(A)$ -énoncé  $\varphi(\bar{a})$  on a  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$  ssi  $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{a}))$ . C'est évident pour les formules atomiques par définition d'un isomorphisme partiel, et aussi pour les combinaisons booléennes. Supposons donc que  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$ . Alors il y a  $a_0 \in M$  tel que  $\mathfrak{M} \models \varphi(a_0, \bar{a})$ . Puisque la famille est karpienne, il y a  $\sigma_0 \in \mathcal{F}$  prolongeant  $\sigma$  et  $b_0 \in N$  avec  $\sigma_0 : Aa_0 \rightarrow Bb_0$ . La famille  $\{\tau \in \mathcal{F} : \tau \supseteq \sigma_0\}$  est toujours karpienne ; par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{M} \models \varphi(a_0, \bar{a})$  ssi  $\mathfrak{N} \models \varphi(b_0, \bar{b})$ . Donc  $\mathfrak{N} \models \exists \varphi(x, \bar{b})$ . La réciproque suit par symétrie. ■

**Remarque 2.18** La réciproque n'est pas toujours vrai : Si  $(\mathfrak{M}, A) \equiv (\mathfrak{N}, B)$ , il n'y a pas toujours une famille karpienne qui prolonge  $A \rightarrow B$ .

**Lemme 2.19** Soit  $(\mathfrak{M}_i : i < \omega)$  une chaîne élémentaire de  $\mathcal{L}$ -structures ( $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}_{i+1}$  pour tout  $i < \omega$ ). Alors la réunion  $\mathfrak{M} = \bigcup_{i < \omega} \mathfrak{M}_i$  est canoniquement une  $\mathcal{L}$ -structure qui satisfait  $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}$  pour tout  $i < \omega$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $M = \bigcup_{i < \omega} M_i$ . On définit une  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathfrak{M}$  sur  $M$  comme suit :

- $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}_0}$  pour tout  $c \in \mathcal{C}$  ; on notera que  $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}_i$  pour tout  $i < \omega$  par l'exercice précédant, et donc  $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}_i}$  pour tout  $i < \omega$ .
- $f^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = f^{\mathfrak{M}_i}(\bar{m})$  si  $\bar{m} \in M_i$ , pour tout  $f \in \mathcal{F}$  (d'arité  $n$ , disons) ; comme  $f^{\mathfrak{M}_i} = f^{\mathfrak{M}_j} \upharpoonright M_i^n$  pour  $i < j$ , ceci est bien défini et  $f^{\mathfrak{M}_i} = f^{\mathfrak{M}} \upharpoonright M_i^n$  pour tout  $i < \omega$ .
- $R^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i < \omega} R^{\mathfrak{M}_i}$  pour tout  $R \in \mathcal{R}$  (d'arité  $n$ , disons) ; comme  $R^{\mathfrak{M}_i} = R^{\mathfrak{M}_j} \cap M_i^n$  pour  $i < j$ , ceci définit une relation sur  $M^n$  telle que  $R^{\mathfrak{M}_i} = R^{\mathfrak{M}} \cap M_i^n$  pour tout  $i < \omega$ .

Il s'en suit que  $\mathfrak{M}_i$  est une sous-structure de  $\mathfrak{M}$  pour tout  $i < \omega$ . Pour vérifier qu'elle soit élémentaire, il nous suffit de voir par récurrence que les quanteurs existentiels sont préservés de la droite à la gauche. Supposons donc que  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ , où  $\varphi(x, \bar{m})$  est une  $\mathcal{L}(M_i)$ -formule. Donc il y a  $m_0 \in M$  tel que  $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ , et il y a  $j \geq i$  tel que  $m_0 \in M_j$ . Par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{M}_j \models \varphi(m_0, \bar{m})$ , d'où  $\mathfrak{M}_j \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ . Comme  $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}_j$ , on a  $\mathfrak{M}_i \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ . ■

Il n'est pas toujours facile de vérifier qu'une sous-structure est élémentaire, puisque l'on doit connaître la satisfaction des énoncés dans les deux structures. Voici un critère utile qui ne mentionne que la satisfaction dans la grande structure :

**Proposition 2.20** TEST DE TARSKI *Soit  $\mathfrak{M}$  une sous-structure de  $\mathfrak{N}$ . Alors  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$  si et seulement si pour toute formule  $\varphi(x)$  à paramètres dans  $\mathfrak{M}$ , si  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x)$ , alors il y a  $m \in \mathfrak{M}$  tel que  $\mathfrak{N} \models \varphi(m)$ .*

DÉMONSTRATION: Si  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$  et  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x)$ , alors  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x)$  et on trouve  $m \in M$  tel que  $\mathfrak{M} \models \varphi(m)$ , d'où  $\mathfrak{N} \models \varphi(m)$ .

Pour la réciproque, nous supposons que le critère soit satisfait. Nous démontrerons par induction sur le nombre de symboles logiques d'un énoncé  $\varphi$  à paramètres dans  $\mathfrak{M}$  que  $\mathfrak{M} \models \varphi$  si et seulement  $\mathfrak{N} \models \varphi$ . Comme  $\mathfrak{M}$  est une sous-structure de  $\mathfrak{N}$ , il suffit de traiter le cas d'un quanteur existentiel. Supposons donc que  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ . Alors il y a  $m_0 \in \mathfrak{M}$  tel que  $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ . Par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ , d'où  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ . Réciproquement, si  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ , alors par hypothèse il y a  $m_0 \in \mathfrak{M}$  tel que  $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ . Par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$ , et  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ . ■

Mais comment peut-on trouver ce témoin  $m_0$  du test de Tarski ?

**Définition 2.21** Soit  $T$  une  $\mathcal{L}$ -théorie. Pour chaque  $\mathcal{L}$ -formule  $\varphi(x, \bar{y})$  considérons un nouveau symbole de fonction  $f_\varphi(\bar{y})$ , et posons

$$\mathcal{L}_{Skolem} = \mathcal{L} \cup \{f_\varphi : \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

La *skolemisation*  $T_{Skolem}$  de  $T$  est la théorie suivante :

$$T \cup \{\forall \bar{y} [\exists x \varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})] : \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

Les  $f_\varphi$  s'appellent *fonctions de Skolem* pour la théorie  $T$ .

**Remarque 2.22** Pour être précis, on doit également inclure dans  $T_{Skolem}$  les énoncés précisant que l'égalité soit une congruence pour toutes les fonctions de Skolem ainsi introduits.

**Lemme 2.23** *La skolemisation d'une théorie consistante est consistante. Plus précisément, tout modèle de  $T$  a une expansion à un modèle de  $T_{Skolem}$ .*

DÉMONSTRATION: Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$  ; nous choisissons un élément  $m_0 \in M$  et interprétons  $f_\varphi$  sur  $\mathfrak{M}$  comme suivant :

- Si  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{m})$ , on choisit  $m_\varphi \in M$  tel que  $\mathfrak{M} \models \varphi(m_\varphi, \bar{m})$  et met  $f_\varphi(\bar{m}) = m_\varphi$ .
- Si  $\mathfrak{M} \models \neg \exists x \varphi(x, \bar{m})$ , alors  $f_\varphi(\bar{m}) = m_0$ .

Il est évident que cette structure  $\mathfrak{M}_{Skolem}$  satisfait  $T_{Skolem}$ . ■

Les fonctions de Skolem n'ont rien de canonique ; leur existence est une conséquence de l'axiome du choix. On appelle  $\mathfrak{M}_{Skolem}$  une *skolemisation* de  $\mathfrak{M}$ .

**Lemme 2.24** *Soit  $\mathfrak{N}$  une structure, et  $A \subseteq N$ . La clôture  $M$  de  $A$  par toutes les constantes, toutes les fonctions dans  $\mathcal{F}$  et toutes les fonctions de Skolem est une sous-structure élémentaire  $\mathfrak{M}$  de  $\mathfrak{N}$ .*

DÉMONSTRATION: Comme  $M$  est clos par les fonctions dans  $\mathcal{F}$ , il est une sous-structure ; si  $\mathfrak{N} \models \exists x p(x, \bar{m})$  avec  $\bar{m} \in M$ , alors  $f_\varphi(\bar{m}) \in M$  est le témoin pour l'application du test de Tarski. ■

**Corollaire 2.25** **LÖWENHEIM-SKOLEM DESCENDANT** *Soit  $\mathfrak{N}$  une  $\mathcal{L}$ -structure infinie,  $A \subseteq N$ , et  $\lambda$  un cardinal infini avec  $|A| + |\mathcal{L}| \leq \lambda \leq |N|$ . Alors il y a une sous-structure élémentaire  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$  contenant  $A$  de cardinal  $\lambda$ .*

DÉMONSTRATION: On peut supposer que  $|A| = \lambda$ . Choisissons une skolemisation de  $\mathfrak{N}$ , et considérons la clôture  $M$  de  $A$  sous les fonctions de  $\mathcal{F}$  et les fonctions de Skolem. Comme il y a  $|\mathcal{L}| + \aleph_0$  formules et donc fonctions de Skolem,  $|M| = |A| = \lambda$  ; par le lemme précédent  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ . ■

## 2.1 Annexe : Ordinaux et cardinaux

**Définition 2.26** Soit  $\langle I, \leq \rangle$  un ordre total. Un sous-ensemble  $X \subseteq I$  est un *ségment initial* si pour tout  $x \in X$  et  $y \in I$  avec  $y \leq x$  on a  $y \in X$ . L'ordre  $\langle I, \leq \rangle$  est un *bon-ordre* si tout sous-ensemble non-vide a un élément minimal. Une injection d'un bon-ordre  $I$  dans un bon-ordre  $J$  est une application  $f : I \rightarrow J$  qui préserve l'ordre, et tel que  $f(I)$  soit un ségment initial de  $J$ .

Un sous-ensemble d'un bon-ordre est également un bon-ordre.

**Exercice 2.27** Le produit lexicographique de deux bon-ordres est un bon-ordre.

**Lemme 2.28** Soient  $I$  et  $J$  deux bon-ordres. Alors soit  $I$  s'injecte dans  $J$ , soit  $J$  s'injecte dans  $I$ , et l'injection est unique. En particulier, si chacun s'injecte dans l'autre,  $I \cong J$ .

DÉMONSTRATION: Montrons d'abord l'unicité d'une injection de  $I$  dans  $J$ . Sinon, il existe un  $x \in I$  minimal tel que deux injections de  $I$  dans  $J$  puissent différer sur  $x$ . Mais alors l'image  $Y$  de  $\{i \in I : i < x\}$  dans  $J$  est le même pour toute injection, et l'image de  $x$  est nécessairement l'unique élément minimal de  $J \setminus Y$ , contradiction.

Supposons qu'il existe un  $x \in I$  tel que le ségment initial  $I(x) = \{i \in I : i \leq x\}$  ne s'injecte pas dans  $J$  ; on choisit  $x$  minimal. Donc pour tout  $x' < x$  le ségment initial  $I(x')$  s'injecte dans  $J$ . Par unicité, pour  $x'' \leq x' < x$  l'injection de  $I(x'')$  est la restriction de l'injection de  $I(x')$  à  $I(x'')$ . Ces injections sont donc compatibles, et leur réunion donne une injection  $f$  de  $\{i \in I : i < x\}$  dans  $J$ . Si l'image  $Y$  est  $J$  entier, alors  $J$  est isomorphe à  $\{i \in I : i < x\}$  et s'injecte donc dans  $I$ . Sinon, il existe un unique élément  $y$  minimal dans  $J \setminus Y$ , et  $f \cup \{x \mapsto y\}$  est une injection de  $I(x)$  dans  $J$ , contradiction.

Donc, si  $J$  ne s'injecte pas dans  $I$ , tout ségment initial  $I(x)$  pour  $x \in I$  s'injecte dans  $J$  ; par unicité ces injections sont compatibles, et leur réunion donne une injection de  $I$  dans  $J$ . ■

**Définition 2.29** Un *ordinal* est une classe d'isomorphismes de bon-ordres. Pour deux ordinaux  $\alpha, \beta$  on dit que  $\alpha \leq \beta$  s'il existe une injection d'un représentant de  $\alpha$  dans un représentant de  $\beta$ .

Evidemment la définition de  $\leq$  ne dépend pas des représentants choisis. Par le lemme 2.28 la relation  $\leq$  est un ordre total sur les ordinaux. A partir de maintenant on ne va plus distinguer entre un ordinal et un de ses représentants.

**Exercice 2.30**  $\leq$  est un bon-ordre sur les ordinaux, et  $\alpha$  est le bon-ordre sur les ordinaux  $< \alpha$ .

**Exercice 2.31** S'il y a une application de  $\alpha$  dans  $\beta$  préservant l'ordre, alors  $\alpha \leq \beta$ .

**Définition 2.32** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux.

- La *somme*  $\alpha + \beta$  est (la classe d'isomorphisme de) le bon-ordre de la concaténation  $\alpha \hat{\ } \beta$  : d'abord  $\alpha$ , ensuite  $\beta$ , ou encore l'ordre lexicographique sur  $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ .
- Le *produit*  $\alpha \cdot \beta$  est l'ordre lexicographique sur  $\beta \times \alpha$ .

On dénote par 0 le bon-ordre sur  $\emptyset$ , et par 1 le bon-ordre sur  $\{0\}$ . Le bon-ordre minimal infini est noté  $\omega$  ; c'est l'ordre sur les entiers naturels.

**Exercice 2.33**  $\alpha + 1$  est le plus petit bon-ordre strictement plus grand que  $\alpha$ , le *successeur* de  $\alpha$ .

**Exercice 2.34** La somme et le produit sont associatifs, et distributif à gauche.

**Lemme 2.35** Si  $\alpha$  est un ordinal, alors soit  $\alpha = 0$ , soit il existe un ordinal  $\beta$  tel que  $\alpha = \beta + 1$  (un ordinal successeur), soit  $\alpha$  est la réunion des images des injections des ordinaux  $\beta < \alpha$  (un ordinal limite). Ces trois possibilités s'excluent mutuellement.

**DÉMONSTRATION:** Si  $\alpha$  est ni 0 ni limite, alors il y a  $x \in \alpha$  tel que  $x$  n'est pas dans l'image d'une injection d'un ordinal  $\beta < \alpha$ . On choisit  $x$  minimal possible. Soit  $I(x) = \{y \in \alpha : y \leq x\}$ . Si  $I(x) < \alpha$ , alors  $x$  est dans l'image de  $I(x)$  dans  $\alpha$ , contradiction. Donc  $I(x) \geq \alpha$ , d'où  $I(x) = \alpha$  ; avec  $\beta = \{y \in \alpha : y < x\}$  on a  $\alpha = \beta + 1$ . ■

**Convention 2.36** Un ordinal a un représentant canonique, qui est donné par la récurrence transfinitie suivante :

- 0 est le plus petit ordinal.
- Le successeur d'un ordinal  $\alpha$  est l'ordinal  $\alpha \cup \{\alpha\}$ .
- Un ordinal limite est la réunion de tous ses prédécesseurs.

Donc  $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \dots, \omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ . La réunion d'une famille quelconque d'ordinaux est encore un ordinal, qui est le sup de la famille.

**Exercice 2.37** Sont équivalents pour deux ordinaux  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$(a) \alpha < \beta \quad (b) \alpha \subset \beta \quad (c) \alpha \in \beta.$$

**Définition 2.38** L'exponentiation  $\alpha^\beta$  est l'unique fonction qui satisfait

- $\alpha^0 = 1$ ,
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ ,
- $\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha^\beta$  pour un ordinal limite  $\lambda$ .

**Exercice 2.39** Soit  $2 := 1 + 1$ . Montrer que :

$$(a) 1 + \omega = \omega < \omega + 1 \quad (b) \omega = 2 \cdot \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2 \quad (c) 2^\omega = \omega < \omega^2.$$

**Théorème 2.40** FORME NORMALE DE CANTOR Soit  $\alpha > 0$  un ordinal. Alors il y a un entier  $k > 0$ , des ordinaux  $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$  et des entiers  $n_1, \dots, n_k > 0$  tels que  $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} n_k$ .

DÉMONSTRATION: Soient  $\beta_1$  minimal avec  $\omega^{\beta_1} > \alpha$ . Alors  $\beta_1$  ne peut pas être 0 ni limite ; il y a donc  $\alpha_1$  et un entier  $n_1 > 0$  maximal avec  $\beta_1 = \alpha_1 + 1$  et  $\omega^{\alpha_1} n_1 \leq \alpha$ . Ensuite on prend  $\beta_2 > 0$  minimal avec  $\omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\beta_2} > \alpha$ . Encore  $\beta_2$  est de la forme  $\alpha_2 + 1$  et il y a un entier  $n_2 > 0$  maximal avec  $\omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 \leq \alpha$ . On répète ; puisque la suite des  $\alpha_i$  est strictement décroissante, elle doit s'arrêter après un nombre  $k$  fini d'étapes, et  $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} n_k$ . ■

**Exercice 2.41** Montrer que la forme normale de Cantor est unique.

**Définition 2.42** La somme symétrique ou somme de Cantor de deux ordinaux  $\alpha = \omega^{\alpha_1} m_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} m_k$  et  $\beta = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} n_k$  (avec  $m_i, n_i \geq 0$ ) est défini par  $\alpha \oplus \beta = \omega^{\alpha_1} (m_1 + n_1) + \dots + \omega^{\alpha_k} (m_k + n_k)$ .

**Définition 2.43** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles. La *cardinalité de  $X$  est plus petit que la cardinalité de  $Y$* , noté  $|X| \leq |Y|$ , s'il existe une injection de  $X$  dans  $Y$ . On dit que  $X$  et  $Y$  *ont même cardinalité* si  $|X| \leq |Y|$  et  $|Y| \leq |X|$ .

Le théorème de Schröder-Bernstein affirme qu'il y a toujours une bijection entre deux ensembles de même cardinalité. Avec l'axiome de choix, tout ensemble est bien-ordonnable ; les cardinalités de deux ensembles sont alors toujours comparables.

**Définition 2.44** Un *cardinal* est un ordinal minimal dans sa classe de même cardinalité ; le cardinal d'un ensemble  $X$ , noté  $|X|$ , est le cardinal correspondant à la cardinalité de  $X$ .

Le plus petit cardinal infini est  $\omega$ , il est également noté  $\aleph_0$ , où  $\aleph$ , *aleph*, est la première lettre de l'alphabet hébreu. Plus généralement, pour un ordinal  $\alpha$ , le  $\alpha$ -me cardinal infini est noté  $\aleph_\alpha$ .

**Définition 2.45** Soient  $\kappa$  et  $\lambda$  deux cardinaux.

- La *somme (cardinale)*  $\kappa + \lambda$  est le cardinal de leur somme ordinale.
- Le *produit (cardinal)*  $\kappa \cdot \lambda$  est le cardinal de leur produit ordinal.
- La *puissance (cardinale)*  $\kappa^\lambda$  est le cardinal de l'ensemble des fonctions de  $\lambda$  dans  $\kappa$ .

La somme et le produit sont commutatifs, associatifs, et distributif.

**Proposition 2.46** Soient  $\kappa, \lambda$  deux cardinaux, dont un infini. Alors leur somme est égal au plus grand; si les deux sont non-nuls, le produit est égal au plus grand.

DÉMONSTRATION: Si  $\kappa \leq \lambda$ , alors  $\kappa + \lambda$  est borné par la cardinalité du produit ordinal  $2 \cdot \lambda = \lambda$ .

Pour le produit, on montre par récursion transfinie que  $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$ . Pour cela, on définit une relation  $\prec$  sur  $\aleph_\alpha^2$  par  $(\beta, \gamma) \prec (\beta', \gamma')$  si  $\max\{\beta, \gamma\} < \max\{\beta', \gamma'\}$  ou  $\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta', \gamma'\}$  et  $(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma')$  dans l'ordre lexicographique.

On voit facilement que  $\prec$  définit un bon-ordre. Mais tout ségment initial de ce bon-ordre est sous-ensemble de  $\delta \times \delta$  pour un ordinal  $\delta < \aleph_\alpha$ , donc avec  $|\delta| < \aleph_\alpha$ . Par hypothèse de récurrence  $|\delta \times \delta| < \aleph_\alpha$  ; la réunion de tous ces ségments initiaux est donc de cardinal au plus  $\aleph_\alpha$ . ■

**Théorème 2.47** CANTOR  $2^\kappa > \kappa$  pour tout cardinal  $\kappa$ .

DÉMONSTRATION: Supposons  $2^\kappa \leq \kappa$ , et soit  $f$  une injection dans  $\kappa$  des fonctions de  $\kappa$  dans 2. Soit  $g$  la fonction de  $\kappa$  dans 2 telle que

- $g(i) \neq (f^{-1}(i))(i)$  si  $i \in f(2^\kappa)$ .
- $g(i) = 0$  sinon.

Alors  $g$  est différent de toutes les fonctions dans  $2^\kappa$ , contradiction. ■

Il y a une deuxième suite importante : Soit  $\kappa$  un cardinal. On pose alors  $\beth_0(\kappa) = \kappa$  (où  $\beth$ , *beth*, est la deuxième lettre de l'alphabet hébreu),  $\beth_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{\beth_\alpha(\kappa)}$ , et  $\beth_\lambda(\kappa) = \bigcup_{\alpha < \lambda} \beth_\alpha(\kappa)$  pour un ordinal limite  $\lambda$ . Si  $\kappa = \alpha_0$  on le supprime. Le théorème de Cantor nous assure que la suite est strictement croissante. L'hypothèse du continu généralisée consiste alors à dire que  $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$  pour tout ordinal  $\alpha$ .

**Exercice 2.48** Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux ordinaux dénombrables, alors la puissance *ordinaire*  $\alpha^\beta$  est dénombrable.

# Chapitre 3

## La compacité

Voici le théorème le plus fondamental en théorie des modèles:

**Théorème 3.1** COMPACITÉ *Soit  $\Phi$  un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de  $\Phi$  a un modèle. Alors  $\Phi$  a un modèle.*

DÉMONSTRATION: Soit  $I$  la collection de sous-ensembles finis de  $\Phi$ , et pour  $i \in I$  soit  $\mathfrak{M}_i$  un modèle de  $i$  (rappelons que  $i$  est un ensemble fini d'énoncés!). Nous allons construire ici, à partir de la famille  $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ , une  $\mathcal{L}$ -structure qui est une sorte de limite, ou moyenne, des structures dans la famille, et qui sera un modèle de  $\Phi$  entier.

**Définition 3.2** Un ensemble non-vide  $\mathcal{U}$  de sous-ensembles de  $I$  est un *filtre* sur  $I$  si

- $\emptyset \notin \mathcal{U}$ .
- si  $X \in \mathcal{U}$  et  $Y \in \mathcal{U}$ , alors  $X \cap Y \in \mathcal{U}$ .
- si  $X \in \mathcal{U}$  et  $X \subseteq Y \subseteq I$ , alors  $Y \in \mathcal{U}$ .

Un filtre  $\mathcal{U}$  est un *ultrafiltre* si pour chaque  $X \subseteq I$  soit  $X \in \mathcal{U}$ , soit  $I - X \in \mathcal{U}$ .

Pour tout  $i \in I$  il y a l'ultrafiltre *principal* sur  $i$ , qui est l'ensemble  $\{X \subseteq I : i \in X\}$ . Par contre, l'existence des ultrafiltres non-principaux nécessite l'axiome du choix.

**Lemme 3.3** *Tout filtre sur  $I$  est contenu dans un ultrafiltre.*

DÉMONSTRATION: On voit facilement que la réunion d'une chaîne croissante de filtres sur  $I$  est toujours un filtre sur  $I$ ; c'est une propriété *inductive*, où toute chaîne croissante a une borne supérieure. Or, le lemme de Zorn nous assure que tout filtre est contenu dans un filtre maximal. Vérifions qu'un filtre maximal est un ultrafiltre.

Soit donc  $\mathcal{U}$  un filtre maximal, et  $X \notin \mathcal{U}$  un sous-ensemble de  $I$ . On pose  $\mathcal{U}' = \{Y \subseteq I : \exists F \in \mathcal{U} F - X \subseteq Y\}$ . C'est un ensemble clos par intersection (car  $\mathcal{U}$  l'est) et agrandissement; si  $\emptyset \in \mathcal{U}'$ , on aurait  $F - X = \emptyset$  pour un  $F \in \mathcal{U}$ , d'où  $F \subseteq X$  et  $X \in \mathcal{U}$ , contradiction. Donc  $\mathcal{U}'$  est un filtre qui étend  $\mathcal{U}$  et contient  $I - X$ ; par maximalité  $I - X \in \mathcal{U}$ . ■

**Définition 3.4** Soit  $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$  une famille de  $\mathcal{L}$ -structures, et  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $I$ . L'*ultraproduit*  $\prod_I \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$  est la structure  $\mathfrak{M}$  suivante:

- le domaine de  $\mathfrak{M}$  est le produit  $\times_I M_i$ , modulo la relation  $\sim$  d'équivalence suivante:

$$(m_i)_{i \in I} \sim (n_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \{i \in I : m_i = n_i\} \in \mathcal{U}.$$

On dénotera la classe de  $(x_i)_{i \in I}$  modulo  $\sim$  par  $[x_i]_{i \in I}$ .

- pour tout  $c \in \mathcal{C}$  on pose  $c^{\mathfrak{M}} = [c^{\mathfrak{M}_i}]_{i \in I}$ .
- pour tout  $f \in \mathcal{F}$  d'arité  $n$  on pose

$$f^{\mathfrak{M}} : ([m_i^1]_{i \in I}, \dots, [m_i^n]_{i \in I}) \mapsto [f^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n)]_{i \in I}.$$

- pour tout  $R \in \mathcal{R}$  d'arité  $n$  soit  $R^{\mathfrak{M}}$  l'ensemble

$$\{([m_i^1]_{i \in I}, \dots, [m_i^n]_{i \in I}) \in \mathfrak{M}^n : \{i \in I : (m_i^1, \dots, m_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Il nous faut vérifier que c'est bien défini.

D'abord, supposons que  $(m_i)_{i \in I} \sim (n_i)_{i \in I}$  et  $(n_i : i \in I) \sim (k_i)_{i \in I}$ . Alors

$$\{i \in I : m_i = k_i\} \supseteq \{i \in I : m_i = n_i\} \cap \{i \in I : n_i = k_i\} \in \mathcal{U},$$

parce que  $\mathcal{U}$  est clos par intersection et agrandissement. Donc  $(m_i)_{i \in I} \sim (k_i)_{i \in I}$ ; comme réflexivité et symétrie sont évidentes,  $\sim$  est bien une relation d'équivalence.

Ensuite, si  $[m_i^j]_{i \in I} = [n_i^j]_{i \in I}$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , alors par clôture de  $\mathcal{U}$  par intersections finies,

$$J = \{i \in I : m_i^j = n_i^j \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{U}.$$

Mais si  $f \in \mathcal{F}$  est une fonction  $n$ -aire,  $J$  est contenu dans

$$\{i \in I : f^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n) = f^{\mathfrak{M}_i}(n_i^1, \dots, n_i^n)\},$$

et la définition de  $f^{\mathfrak{M}}$  ne dépend pas du choix des représentants modulo  $\sim$ . De même, si  $R \in \mathcal{R}$  est une relation  $n$ -aire, alors  $J$  est contenu dans

$$\{i \in I : (m_i^1, \dots, m_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i} \Leftrightarrow (n_i^1, \dots, n_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i}\},$$

et la définition de  $R^{\mathfrak{M}}$  ne dépend pas du choix des représentants modulo  $\sim$  non plus.

Notons que les définitions de  $\sim$  et de  $=^{\mathfrak{M}}$  sont les mêmes: si  $=^{\mathfrak{M}_i}$  est la vraie égalité sur  $\mathfrak{M}_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $=^{\mathfrak{M}}$  est la vraie égalité sur  $\mathfrak{M}$ , conformément à notre convention.

**Théorème 3.5** CRITÈRE DE LOS *Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur un ensemble  $I$ , et  $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$  une famille de  $\mathcal{L}$ -structures. Si  $\bar{m} = ([m_i^1]_{i \in I}, \dots, [m_i^n]_{i \in I})$  est un  $n$ -uple dans l'ultraproduit  $\mathfrak{M} = \prod_I \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$  et  $\varphi(\bar{x})$  est une  $\mathcal{L}$ -formule, alors  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$  si et seulement si*

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

DÉMONSTRATION: D'abord, nous démontrons par récurrence sur la longueur d'un terme  $t(\bar{x})$  que  $\mathfrak{M} \models t(\bar{m}) = [n_i]_{i \in I}$  si et seulement si

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models t(m_i^1, \dots, m_i^n) = n_i\} \in \mathcal{U}.$$

C'est évident si  $t(\bar{x}) = f(\bar{x})$  pour une fonction  $n$ -aire  $f \in \mathcal{F}$ , par définition de  $f^{\mathfrak{M}}$ . Soient donc  $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$  des termes de longueur inférieure à celle de  $t$ , et  $f \in \mathcal{F}$  une fonction  $k$ -aire, tels que  $t(\bar{x}) = f(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$ . Si  $n_i^j = t_j(m_i^1, \dots, m_i^n)$  pour  $j = 1, 2, \dots, k$ , par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{M} \models [n_i^j]_{i \in I} = t_j(\bar{m})$ , pour tout  $j = 1, 2, \dots, k$ . Ensuite

$$\mathfrak{M} \models f([n_i^1]_{i \in I}, \dots, [n_i^k]_{i \in I}) = [n_i]_{i \in I}$$

si et seulement si  $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models f(n_i^1, \dots, n_i^k) = n_i\} \in \mathcal{U}$  par définition de  $f^{\mathfrak{M}}$ ; le résultat suit par substitution.

Maintenant on peut démontrer le critère par récurrence sur la longueur de  $\varphi(\bar{x})$ ; pour l'économie de l'effort on supposera qu'on a remplacé toutes les formules par des formules équivalentes qui ne contiennent ni  $\vee$  ni  $\forall$  (et la récursion reste bien dans cette classe).

Si  $\varphi(\bar{x}) = R(\bar{x})$  pour un  $R \in \mathcal{R}$ , la proposition suit de la définition de  $R^{\mathfrak{M}}$ ; si  $\varphi(\bar{x}) = R(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$  est atomique, on utilise le paragraphe précédent. Si  $\varphi(\bar{m}) = \neg\psi(\bar{m})$ , on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \psi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \notin \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{M}_i \not\models \psi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

comme  $I - J \subseteq I$  est dans  $\mathcal{U}$  si et seulement si  $J \notin \mathcal{U}$ .

Si  $\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})$ , on a pour  $j = 1, 2$  que

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi_j(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \supseteq \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\}. \quad (\dagger_j)$$

Donc si le dernier est dans  $\mathcal{U}$ , ainsi sont les premiers, et par hypothèse de récurrence  $\mathfrak{M} \models \varphi_j(\bar{m})$  pour  $j = 1, 2$ , d'où  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ . Réciproquement, si  $\mathfrak{M}$  satisfait  $\varphi(\bar{m})$ , il satisfait  $\varphi_1(\bar{m})$  et  $\varphi_2(\bar{m})$ , donc les premiers ensembles dans  $(\dagger_j)$  sont dans  $\mathcal{U}$  pour  $j = 1, 2$ , ainsi que leur intersection, qui est le deuxième.

Enfin, si  $\varphi(\bar{m}) = \exists x \psi(x, \bar{m})$ , soit  $J = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\}$ . Pour chaque  $i \in J$  soit  $n_i \in \mathfrak{M}_i$  tel que  $\mathfrak{M}_i \models \psi(n_i, m_i^1, \dots, m_i^n)$ ; pour  $i \notin J$  on choisit  $n_i \in \mathfrak{M}_i$  quelconque. Si  $n = [n_i : i \in I]$ , alors par hypothèse de récurrence  $i \in I$  implique  $\mathfrak{M} \models \psi(n, \bar{m})$ , d'où  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ . Réciproquement, si  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{x})$ , il y a un  $n = [n_i : i \in I] \in \mathfrak{M}$  tel que  $\mathfrak{M} \models \psi(n, \bar{m})$ ; par hypothèse de récurrence  $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(n_i, m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}$ , et  $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}$ . ■

Maintenant nous pouvons finir la démonstration du théorème de la compacité. Rappelons que  $I$  est l'ensemble des sous-ensembles finis de  $\Phi$ , et que  $\mathfrak{M}_i \models i$  pour chaque  $i \in I$ . Pour  $i \in I$  soit  $I_i$  l'ensemble des sous-ensembles finis de  $\Phi$  qui étendent  $i$ . Si  $\mathcal{U}_0 = \{X \subseteq I : \text{il y a } i \in I \text{ tel que } X \supseteq I_i\}$ , alors pour  $X \supseteq I_i$  et  $Y \supseteq I_j$  on a  $X \cap Y \supseteq I_{i \cup j} \in \mathcal{U}_0$ ; en plus  $X \supseteq I_i \ni i$ , et  $\mathcal{U}_0$  est un filtre. Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre contenant  $\mathcal{U}_0$ , et  $\mathfrak{M} = \prod_I \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$ . Donc pour tout  $\sigma \in \Phi$  on a

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \sigma\} \supseteq I_{\{\sigma\}} \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}.$$

Par le théorème de Los,  $\mathfrak{M} \models \sigma$ . ■

La réciproque est bien sûr évident.

**Exercice 3.6** Démontrer que si toutes les  $\mathfrak{M}_i$  sont élémentairement équivalentes, alors tout ultraproduit  $\prod_I \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$  est élémentairement équivalent aux  $\mathfrak{M}_i$ .

**Exercice 3.7** Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur un ensemble  $I$ , et  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure. Alors on peut considérer l'ultraproduit où tous les  $\mathfrak{M}_i$  sont égaux à  $\mathfrak{M}$ ; on l'appelle une *ultrapuissance* de  $\mathfrak{M}$ , et on le dénote  $\prod_I \mathfrak{M}/\mathcal{U}$ .

1. Vérifier que l'application diagonale  $m \mapsto [m]_{i \in I}$  est un  $\mathcal{L}$ -morphisme, l'inclusion canonique.
2. Démontrer que l'inclusion canonique est élémentaire.

**Exemple 3.8** Il n'y a pas d'ensemble  $\Phi$  de  $\mathcal{L}_{ord}$ -énoncés dont les modèles sont précisément les ordres finis.

DÉMONSTRATION: Supposons que  $\Phi$  est un tel ensemble, et considérons l'ensemble

$$\Psi = \Phi \cup \left\{ \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j : n < \omega \right\}.$$

Pour tout sous-ensemble fini  $\Psi_0$  de  $\Psi$  soit  $n_0$  maximal tel que  $\Psi_0$  contient l'énoncé  $\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j$ , et soit  $\mathfrak{M}_0$  un ordre fini de cardinalité  $n_0$ . Comme  $\mathfrak{M}_0 \models \Phi$  et a  $n_0$  éléments,  $\mathfrak{M}_0 \models \Psi_0$ . Donc chaque sous-ensemble fini de  $\Psi$  a un modèle; par compacité  $\Psi$  a un modèle  $\mathfrak{M}$ . Comme  $\mathfrak{M} \models \Phi$ , il est un ordre fini. Mais  $\mathfrak{M}$  a au moins  $n$  éléments pour chaque  $n < \omega$ , contradiction. ■

**Exercice 3.9** Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble  $\Phi$  de  $\mathcal{L}_{ann}$ -énoncés dont les modèles sont précisément les corps finis.

**Exemple 3.10** 1. LES ENTIERS NON-STANDARDS

Soit  $c$  un nouvel symbole de constante, et  $\Phi$  la  $\mathcal{L}_{ann} \cup \{c\}$ -théorie suivante:

$$\text{Th}_{\mathcal{L}_{ann}}(\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \dot{-}, * \rangle, \mathbb{N}) \cup \{ \exists x n * x = c : n < \omega \} \cup \{ c \neq 0 \}$$

(on pose  $n \dot{-} m = 0$  si  $m \geq n$ ). Tout sous-ensemble fini de  $\Phi$  a un modèle: on prend  $\mathbb{N}$  lui-même, et interprète  $c$  par un entier suffisamment divisible. Soit  $\mathbb{N}^*$  un modèle de tout  $\Phi$ . Alors l'inclusion  $n \mapsto n^{\mathbb{N}^*}$  est élémentaire; c'est un modèle non-standard de l'arithmétique. Notons que  $c^{\mathbb{N}^*}$  est un entier non-standard non-nulle qui est divisible par tout entier standard.

## 2. LES RÉELS NON-STANDARDS

Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ann} \cup \{c, <\}$ , et  $\Phi$  la  $\mathcal{L}$ -théorie suivante:

$$\text{Th}_{\mathcal{L}_{ann} \cup \{<\}}(\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, *, < \rangle, \mathbb{R}) \cup \{0 < c < \frac{1}{n} : n < \omega\}.$$

Tout sous-ensemble fini de  $\Phi$  ayant  $\mathbb{R}$  comme modèle (avec une interprétation de  $c$  assez proche de 0), on trouve un modèle  $\mathbb{R}^*$  de  $\Phi$  entier, les réels non-standard. L'inclusion  $r \mapsto r^{\mathbb{R}^*}$  est élémentaire. Pour chaque  $r \in \mathbb{R}^*$  borné (tel qu'il y a  $r \in \mathbb{R}$  avec  $r^* < r$  on trouve un unique réel  $\text{stand}(r^*) \in \mathbb{R}$  tel que  $|r^* - \text{stand}(r^*)| < \frac{1}{n}$  pour tout  $n < \omega$ . On appelle  $\text{stand}(r^*)$  la partie *standard* du réel non-standard  $r^*$ .

Notons que ni les entiers ni les réels non-standard sont déterminés à isomorphisme près.

Maintenant nous allons voir que l'équivalence élémentaire ne peut pas déterminer le cardinal d'une  $\mathcal{L}$ -structure, sauf si elle est fini.

**Lemme 3.11** *Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure infini. Alors il y a  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  arbitrairement large.*

DÉMONSTRATION: Soit  $\lambda$  un cardinal arbitraire,  $\{c_i : i < \lambda\}$  des nouvelles constantes, et

$$\Phi = \text{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Alors chaque sous-ensemble fini de  $\Phi$  ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qu'on peut interpréter dans  $\mathfrak{M}$ . Donc chaque sous-ensemble fini de  $\Phi$  a un modèle; par compacité il y a un modèle  $\mathfrak{N}$  de  $\Phi$ . Evidemment  $|\mathfrak{N}| \geq \lambda$ . En plus, on a une injection canonique de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{N}$ , qui envoie un élément  $m \in \mathfrak{M}$  à la réalisation  $m^{\mathfrak{N}}$  de sa constante dans  $\mathfrak{N}$ .

Soit maintenant  $\varphi(\bar{m}) \in \mathcal{L}(\bar{m})$  pour un  $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ . Alors

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{m}) \in \text{Th}(\mathfrak{M}, M) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}),$$

donc l'inclusion est élémentaire. ■

**Corollaire 3.12** LÖWENHEIM-SKOLEM ASCENDANT *Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure infini. Alors pour tout  $\lambda \geq |\mathcal{L}| + |M|$  il a une extension élémentaire  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  de cardinal  $\lambda$ .*

DÉMONSTRATION: Par le lemme 3.11 on trouve  $\mathfrak{N}' \succ \mathfrak{M}$  de cardinal au moins  $\lambda$ ; par Löwenheim-Skolem descendant il y a  $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$  contenant  $\mathfrak{M}$  de cardinal  $\lambda$ , et  $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ . ■

# Chapitre 4

## Types

**Définition 4.1** Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure,  $A \subseteq M$  et  $\bar{a}$  un uple dans  $M$ . Le *type* de  $\bar{a}$  sur  $A$ , noté  $\text{tp}(\bar{a}/A)$ , est l'ensemble des  $\mathcal{L}(A)$ -formules  $\varphi(\bar{x})$  satisfaites par  $\bar{a}$  dans  $\mathfrak{M}$ . Si  $A$  est vide, on l'omet et note  $\text{tp}(\bar{a})$ .

Plus généralement, un *n-type* (complet) sur  $A$  est un ensemble  $p(\bar{x})$  maximal de  $\mathcal{L}(A)$ -formules avec variables libres  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , tel que toute partie finie de  $p(\bar{x})$  est réalisée dans  $\mathfrak{M}$ .

La famille des  $n$ -types sur  $A$  est noté  $S_n(A)$ ; on pose  $S(A) = \bigcup_{n < \omega} S_n(A)$ .

Nous allons également considérer des types en une infinité de variables.

**Remarque 4.2** Soit  $p(\bar{x})$  un type sur  $A \subseteq \mathfrak{M}$ , et  $\varphi(\bar{x})$  une formule telle que ni  $\varphi$  ni  $\neg\varphi$  est dans  $p$ . Par maximalité on trouve des sous-ensembles finis  $\pi_0$  et  $\pi_1$  de  $p$  tels que ni  $\pi_0(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ , ni  $\pi_1(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$  a une réalisation dans  $\mathfrak{M}$ . Mais  $\pi_0(\bar{x}) \cup \pi_1(\bar{x})$  a une réalisation  $\bar{a}$  dans  $\mathfrak{M}$ ; comme soit  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$ , soit  $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{a})$ , on obtient une contradiction. Donc pour toute  $\mathcal{L}(A)$ -formule  $\varphi(\bar{x})$  soit  $\varphi$ , soit  $\neg\varphi$  est dans  $p$ .

$\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$  fait partie de tout type sur  $A$ , et  $\text{tp}(\bar{a}/A)$  dépend du modèle ambiant  $\mathfrak{M}$ . Or, ce type reste inchangé si on remplace  $\mathfrak{M}$  par une extension élémentaire.

**Remarque 4.3** La collection des  $n$ -types sur  $\emptyset$  ne dépend que de la théorie  $\text{Th}(\mathfrak{M}) = T$ ; on la dénote par  $S_n(T)$ .

**DÉMONSTRATION:** Soient  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  deux modèles de  $T$ , et  $p$  un type sur  $\emptyset$  dans  $\mathfrak{M}$ . Alors pour toute partie finie  $\pi$  de  $p$  on a  $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge \pi(\bar{x})$ . Par complétude,  $T \models \exists \bar{x} \bigwedge \pi(\bar{x})$ , et on trouve  $\bar{b} \in N$  tel que  $\mathfrak{N} \models \pi(\bar{b})$ . Donc  $p$  est

finiment réalisable dans  $\mathfrak{N}$ ; comme  $p$  contient toute formule ou sa négation,  $p$  est un type dans  $\mathfrak{N}$ . ■

**Remarque 4.4** Comme il y a au plus  $|\mathcal{L}| + |A| + \omega$  formules avec paramètres dans  $A$ , il y a au plus  $2^{|\mathcal{L}| + |A| + \omega}$  types sur  $A$ .

- Exemple 4.5**
1. Dans la théorie des ordres denses, un 1-type sur  $A$  correspond à la coupure qu'il détermine dans  $A$ .
  2. Dans  $\text{Th}(\mathbb{Z}, 0, +)$  un 1-type sur  $\{1\}$  non-réalisé est déterminé par sa classe modulo  $n$  pour chaque entier  $n$ .
  3. Dans  $\text{Th}(\mathbb{C}, 0, 1, +, -, *)$  un 1-type  $p(x)$  sur un sous-corps  $k$  est déterminé
    - soit par l'unique  $a \in k$  tel que  $x = a$  est dans  $p(x)$ ,
    - soit par le polynome minimal sur  $k$  d'une réalisation de  $p$ ,
    - soit par l'ensemble  $f(x) \neq 0$  pour tout  $f(x) \in k[x]$ .

**Lemme 4.6** Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure,  $A \subseteq M$  et  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ . S'il y a une famille karpienne d'isomorphismes partiels de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{M}$  qui prolonge  $A\bar{a} \mapsto B\bar{b}$ , alors  $\text{tp}(\bar{a}/A) = \text{tp}(\bar{b}/A)$ .

DÉMONSTRATION: Par la proposition 2.17 on a  $(\mathfrak{M}, A\bar{a}) \equiv (\mathfrak{M}, A\bar{b})$ , ce qui veut dire que pour toute  $\mathcal{L}(A)$ -formule  $\varphi(\bar{x})$  on a  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$  ssi  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b})$ . Donc  $\text{tp}(\bar{a}/A) = \text{tp}(\bar{b}/A)$ . ■

**Proposition 4.7** Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure,  $A \subseteq M$  et  $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ . Alors il y a  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  et  $\bar{c} \in N$  tel que  $p = \text{tp}(\bar{c}/A)$ . Deux uples  $\bar{a}$  et  $\bar{a}'$  ont même type sur  $A$  si et seulement s'il y a  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  et un automorphisme de  $\mathfrak{N}$  qui fixe  $A$  et envoie  $\bar{a}$  à  $\bar{a}'$ .

DÉMONSTRATION: Toute partie finie de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup p(\bar{c})$  (où  $\bar{c}$  sont des nouvelles constantes) est satisfaite dans  $\mathfrak{M}$ . Par compacité il y a un modèle  $\mathfrak{N}$  de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup p(\bar{c})$ ; comme l'application  $M \ni m \mapsto m^{\mathfrak{N}}$  est élémentaire, on peut considérer  $\mathfrak{N}$  comme extension élémentaire de  $\mathfrak{M}$ . On pose  $\bar{a} = \bar{c}^{\mathfrak{N}}$ ; il est évident que  $\text{tp}(\bar{a}/A) = p(\bar{x})$ .

Maintenant soient  $\bar{a}$  et  $\bar{a}'$  deux réalisations d'un type  $p(\bar{x})$  sur  $A$  dans une extension élémentaire  $\mathfrak{M}_0$  de  $\mathfrak{M}$ . Nous allons construire une suite

$$\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \dots$$

d'extensions élémentaires, et une chaîne  $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots$  d'isomorphismes partiels élémentaires  $\sigma_i : \mathfrak{M}_i \rightarrow \mathfrak{M}_i$ , telle que  $\sigma_0$  fixe  $A$  et envoie  $\bar{a}$  à  $\bar{a}'$ , et pour tout  $i < \omega$  la domaine de  $\sigma_{2i+1}$  contient  $\mathfrak{M}_{2i}$  et l'image de  $\sigma_{2i+2}$  contient  $\mathfrak{M}_{2i+1}$ . Alors  $\mathfrak{N} = \bigcup_{i < \omega} \mathfrak{M}_i$  sera une extension élémentaire de  $\mathfrak{M}$ , et  $\sigma = \bigcup_{i < \omega} \sigma_i$  sera un automorphisme de  $\mathfrak{N}$  qui fixe  $A$  et envoie  $\bar{a}$  à  $\bar{a}'$ .

**Lemme 4.8** *Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure et  $\sigma$  un isomorphisme élémentaire partiel de  $\mathfrak{M}$ . Alors il y a  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  et un isomorphisme élémentaire partiel  $\tau$  de  $\mathfrak{N}$  de domaine  $\mathfrak{M}$  qui étend  $\sigma$ .*

DÉMONSTRATION: Pour chaque  $m \in M$  soit  $m'$  une nouvelle constante. Il nous faut voir que la théorie  $\Phi$  suivante est consistante:

$$\text{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{\varphi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \text{dom}(\sigma)\}.$$

Considérons une partie finie  $\Phi_0$  de  $\Phi$  qui contient des formules  $\varphi_i(\bar{m}'_i, \sigma(\bar{n}_i))$  pour  $i \leq n$ . Alors  $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i(\bar{m}_i, \bar{n}_i)$  et  $\mathfrak{M} \models \exists_{i \leq n} \bar{x}_i \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$ ; comme  $\sigma$  est élémentaire, on a

$$\mathfrak{M} \models \exists_{i \leq n} \bar{x}_i \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i)).$$

Donc, on peut modéliser  $\Phi_0$  dans  $\mathfrak{M}$ . Par compacité on trouve un modèle  $\mathfrak{N}$  de  $\Phi$ , qui est une extension élémentaire de  $\mathfrak{M}$ ; l'application  $\tau : m \mapsto (m')^{\mathfrak{N}}$  est une continuation élémentaire de  $\sigma$  sur  $\mathfrak{M}$ . ■

Maintenant on applique le lemme 4.8 d'abord à  $\mathfrak{M}_0$  et  $\sigma_0$  pour obtenir  $\mathfrak{M}_1$  et  $\sigma_1$ , ensuite à  $\mathfrak{M}_1$  et  $\sigma_1^{-1}$  pour obtenir  $\mathfrak{M}_2$  et  $\sigma_2^{-1}$ , etc. ■

La preuve précédente démontre une méthode très utile en théorie des modèles pour construire un automorphisme d'une structure  $\bigcup_{i < \omega} \mathfrak{M}_i$  comme réunion de morphismes partiels, le *va-et-vient*: le *va* aux étapes impairs nous assure que  $\sigma$  sera total, et le *vient* aux étapes pairs prend charge de la surjectivité.

**Définition 4.9** Un type  $p(\bar{x})$  sur  $A$  est *algébrique* s'il y a une  $\mathcal{L}(A)$ -formule  $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$  qui n'a qu'un nombre fini de réalisations. Un uple  $\bar{a}$  est *algébrique sur  $A$*  si  $\text{tp}(\bar{a}/A)$  l'est.

**Exercice 4.10** Un uple  $\bar{a}$  est algébrique sur  $A$  si et seulement s'il est contenu dans chaque sous-structure élémentaire contenant  $A$  de toute extension élémentaire de  $\mathfrak{M}$ .

Nous avons vu qu'on peut toujours trouver un modèle qui réalise un type. Mais est-ce qu'on peut en trouver un qui ne le réalise pas ?

**Définition 4.11** Un type  $p(\bar{x})$  sur  $A$  est *principal*, ou *isolé*, s'il y a une formule  $\varphi(\bar{x})$  dans  $p(\bar{x})$  telle que  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\varphi(\bar{x})\} \models p(\bar{x})$ . Dans ce cas, la formule  $\varphi(\bar{x})$  *isole*  $p(\bar{x})$  sur  $A$ .

Une reformulation nous donne :  $\varphi(\bar{x})$  isole  $\text{tp}(\bar{a}/A)$  si et seulement si  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\varphi(\bar{a})\} \models \text{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a})$ .

**Exercice 4.12** Un type algébrique est isolé.

**Lemme 4.13**  $\text{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$  est isolé ssi  $\text{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$  et  $\text{tp}(\bar{b}/A)$  le sont.

DÉMONSTRATION: Si  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  isole  $\text{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$ , alors  $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$  isole  $\text{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$ , et  $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$  isole  $\text{tp}(\bar{b}/A)$ . Réciproquement, si  $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$  isole  $\text{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$  et  $\psi(\bar{y})$  isole  $\text{tp}(\bar{b}/A)$ , alors

$$\text{Th}(M, A) \cup \{\psi(\bar{b})\} \models \text{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \quad \text{et} \quad \text{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \cup \{\varphi(\bar{a}, \bar{b})\} \models \text{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a}\bar{b}).$$

Donc  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y})$  isole  $\text{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$ . ■

Il est évident qu'un type principal est réalisé dans chaque modèle contenant  $A$ , comme  $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$  fait partie de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ . Pour la réciproque, il faut que  $\mathcal{L}(A)$  soit dénombrable.

**Théorème 4.14** OMISSION DES TYPES Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure,  $A \subseteq M$ , et  $p(\bar{x}) \in S_n(A)$  dénombrable. Alors il y a un modèle de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$  qui omet  $p$  si et seulement si  $p$  n'est pas principal.

DÉMONSTRATION: Soit  $C = \{c_i : i < \omega\}$  des nouvelles constantes. Nous allons construire une  $\mathcal{L}(A \cup C)$ -théorie consistante  $T$  étendant  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$  telle que pour chaque formule  $\varphi(x)$  il y a  $i_\varphi < \omega$  tel que  $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c_{i_\varphi})$  est dans  $T$ . Alors si  $\mathfrak{N}$  est un modèle de  $T$ , alors  $\{c_i^{\mathfrak{N}} : i < \omega\}$  est une sous-structure de  $\mathfrak{N}$ , comme parmi les formules  $\varphi(x)$  se trouvent celles de la forme  $x = a$  pour toute constante  $a$ , et  $x = f(\bar{c})$  pour toute fonction  $f(\bar{x}) \in \mathcal{F}$  et  $\bar{c} \in C$ . Par le test de Tarski, l'inclusion est élémentaire, et  $\{c_i^{\mathfrak{N}} : i < \omega\}$  est un modèle de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ ; nous allons faire de manière qu'il omet  $p$ .

Soit  $(\varphi_i(x) : 0 < i < \omega)$  une énumération des  $\mathcal{L}(A \cup C)$ -formules avec une variable libre  $x$ , et  $(\bar{c}_i : i < \omega)$  une énumération des  $n$ -uplets dans  $C$ . On pose  $T_0 = \emptyset$ ; si on a déjà construit  $T_n$  fini tel que  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup T_n$  a un modèle, alors :

- Si  $n = 2m$ , soit  $i$  minimal tel que  $c_i$  ne figure pas dans  $T_n$ . On met  $T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x \varphi_m(x) \rightarrow \varphi_m(c_i)\}$ ; comme  $c_i$  ne figure pas dans  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup T_n$ , il y a un modèle de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup T_{n+1}$ .
- Si  $n = 2m + 1$ , on considère l'uple  $\bar{c}_m$ . Soient  $\bar{d}$  les constantes dans  $C - \{\bar{c}_m\}$  qui figurent dans  $T_n$ , et  $\psi(\bar{c}_m, \bar{d})$  l'énoncé  $\bigwedge T_n$ . Comme  $p(\bar{x})$  n'est pas principal,

$$\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})\} \not\models p(\bar{x})$$

et il y a un modèle  $\mathfrak{M}_m$  de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\psi(\bar{c}_m, \bar{d})\}$  tel que  $\mathfrak{M}_m \not\models p(\bar{c}_m)$ . Si  $\psi_m(\bar{x}) \in \text{tp}(\bar{c}_m/A) \setminus p(\bar{x})$ , alors  $T_{n+1} = T_n \cup \{\psi_m(\bar{c}_m)\}$  a un modèle.

On pose  $T = \bigcup_{n < \omega} T_n$ . Alors  $T$  est consistant par compacité et étend  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ , les quanteurs existentiels ont des témoins dans  $C$ , et aucun uple dans  $C$  réalise  $p$ . ■

**Exercice 4.15** Soit  $T$  une théorie (possiblement incomplète), dans un langage dénombrable. Une formule  $\varphi(\bar{x})$  est un *support* pour un ensemble  $\Phi(\bar{x})$  si  $T \cup \{\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})\}$  a un modèle et  $\varphi(\bar{x})$  implique  $\Phi(\bar{x})$  modulo  $T$ . Si  $\Phi_n(\bar{x})$  est sans support pour chaque  $n < \omega$ , démontrer que  $T$  a un modèle qui omet tous les  $\Phi_n(\bar{x})$  simultanément.

# Chapitre 5

## Modèles

**Définition 5.1** Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure,  $A \subseteq B \subseteq M$ , et  $\lambda$  un cardinal.

- $B$  est *atomique* sur  $A \subseteq M$  si  $\text{tp}(\bar{b}/A)$  est isolé pour chaque uple fini  $\bar{b}$  de  $B$ . Comme toujours, on supprime “sur  $\emptyset$ ”.
- $B$  est *construit* sur  $A$  s’il existe une énumération  $(a_i : i < \alpha)$  de  $B \setminus A$  tel que  $\text{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$  est isolé pour tout  $i < \alpha$ .
- $\mathfrak{M}$  est *premier* sur  $A$  si  $\mathfrak{M}$  se plonge dans tout modèle de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ .
- $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -*homogène* si tout isomorphisme partiel élémentaire dont le domaine est de cardinalité  $< \lambda$  est contenu dans une famille karpienne, et *homogène* si  $\mathfrak{M}$  est  $|\mathfrak{M}|$ -homogène.
- $\mathfrak{M}$  est *fortement*  $\lambda$ -*homogène* si tout isomorphisme partiel élémentaire dont le domaine est de cardinalité  $< \lambda$  se prolonge en un automorphisme, et *fortement homogène* si  $\mathfrak{M}$  est fortement  $|\mathfrak{M}|$ -homogène.
- $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -*universel* si tout modèle de  $\text{Th}(\mathfrak{M})$  de cardinal  $\leq \lambda$  se plonge élémentairement dans  $\mathfrak{M}$ , et *universel* si  $\mathfrak{M}$  est  $|\mathfrak{M}|$ -universel.
- $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -*saturée* si  $\mathfrak{M}$  réalise tout 1-type sur un domaine  $A \subseteq M$  de cardinalité  $< \lambda$ , et *saturée* si  $\mathfrak{M}$  est  $|\mathfrak{M}|$ -saturé.

**Proposition 5.2** Soit  $\mathfrak{M}$  une  $\mathcal{L}$ -structure, et  $\lambda \geq |\mathcal{L}|$  un cardinal infini.

1. Si  $B \setminus A$  est dénombrable et  $B$  est atomique sur  $A$ , alors  $B$  est construit sur  $A$ .

2. Si  $B$  est construit sur  $A$ , alors  $B$  est atomique sur  $A$ .
3. Si  $\mathfrak{M}$  est construit sur  $A$ , alors  $\mathfrak{M}$  est premier sur  $A$ .
4. Si  $A$  et  $\mathcal{L}$  sont dénombrables, alors  $\mathfrak{M}$  est atomique sur  $A$  ssi  $\mathfrak{M}$  est construit sur  $A$  ssi  $\mathfrak{M}$  est premier sur  $A$ .
5. Si  $\mathfrak{M}$  est fortement  $\lambda$ -homogène, alors  $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -homogène.
6. Si  $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -saturée et  $A \subseteq M$  est de cardinalité  $< \lambda$ , alors  $\mathfrak{M}$  réalise tout  $\lambda$ -type sur  $A$ .
7.  $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -saturée ssi  $\mathfrak{M}$  est  $\lambda$ -universel et  $\lambda$ -homogène.

DÉMONSTRATION:

1. Découle du Lemme 4.13.
2. Soit  $(a_i : i < \alpha)$  une construction de  $B$  sur  $A$ . On montre par récurrence que  $\{a_i : i < j\}$  est atomique sur  $A$  pour tout  $j \leq \alpha$ . C'est évident pour  $j = 0$  ou  $j$  limite. Soit  $j = k + 1$  et  $\bar{a} \in \{a_i : i \leq k\}$ . On pose  $\bar{a}' = \bar{a} \setminus \{a_k\}$ . Alors  $\text{tp}(a_k/A, a_i : i < k)$  est isolé par une formule  $\varphi(x, \bar{a}'')$  avec  $\varphi \in \mathcal{L}(A)$  et  $\bar{a}'' \in \{a_i : i < k\}$ . Cette même formule isole  $\text{tp}(a_k/A, \bar{a}', \bar{a}'')$ . Puisque  $\text{tp}(\bar{a}'\bar{a}''/A)$  est isolé par hypothèse de récurrence,  $\text{tp}(a_k\bar{a}'\bar{a}''/A)$  est isolé, ainsi que  $\text{tp}(\bar{a}/A)$ , par le lemme 4.13.
3. Soit  $(a_i : i < \alpha)$  une construction de  $\mathfrak{M}$  sur  $A$ . Puisque tout type isolé est réalisé dans tout modèle  $\mathfrak{N}$  de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ , on trouve par récurrence transfinie sur  $j$  une suite  $(b_i : i < \alpha)$  d'éléments de  $N$  telle que  $(\mathfrak{M}, A, a_i : i \leq j) \equiv (\mathfrak{N}, A, b_i : i \leq j)$ .
4. Si  $\mathfrak{M}$  n'est pas atomique sur  $A$ , alors il y a  $n < \omega$  et un  $n$ -type principal  $p \in S_n(A)$  qui est réalisé dans  $\mathfrak{M}$ . Par le théorème 4.14 il y a un modèle  $\mathfrak{N}$  de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$  qui omet  $p$ , et  $\mathfrak{M}$  ne peut pas se plonger élémentairement dans  $\mathfrak{N}$  sur  $A$  comme la réalisation de  $p$  n'a pas d'image possible. D'autre part, si  $A$  est dénombrable, alors par le théorème 2.25 il y a un modèle dénombrable de  $\text{Th}(\mathfrak{M}, A)$ , donc un modèle premier est forcément dénombrable. Le reste découle de 1.–3.
5. Suit immédiatement des définitions.

6. Soit  $p(x_i : i < \lambda) \in S_\lambda(A)$ , et  $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$  une extension élémentaire qui réalise  $p$  par une suite  $(n_i : i < \lambda)$ . On construit une chaîne d'isomorphismes partiels élémentaires  $(\sigma_i : i < \lambda)$  de  $\mathfrak{N}$  dans  $\mathfrak{M}$  telle que  $\text{dom}(\sigma_i) = A \cup \{n_j : j < i\}$ . On prend  $\sigma_0 = \text{id}_A$ , et des réunions aux limites. Soit  $j = k + 1$ . Alors

$$\sigma_k(\text{tp}(n_k/A, n_i : i < k)) \in S_1(A, \sigma_k(n_i) : i < k) ;$$

comme  $|A \cup \{\sigma_k(n_i) : i < k\}| < \lambda$ , ce type est réalisé par un élément  $m \in M$ . On pose  $\sigma_j(n_k) = m$ . Alors la suite  $(\sigma_{i+1}(n_i) : i < \lambda)$  réalise  $p$  dans  $M$ .

7. Exercice. ■

**Remarque 5.3** Si  $|A| < \lambda < |S(A)|$  pour un sous-ensemble  $A$  d'un modèle de  $T$ , alors il n'y a pas de modèle saturé de cardinal  $\lambda$  (un tel modèle devrait contenir une copie  $A'$  de  $A$ , et ensuite réalisations de tous les types sur  $A'$ ).

**Théorème 5.4** 1. *Deux modèles atomiques dénombrables d'une théorie complète sont isomorphes. Plus généralement, si  $(\mathfrak{M}, A) \equiv (\mathfrak{N}, B)$ ,  $M \setminus A$  et  $N \setminus B$  sont dénombrables,  $\mathfrak{M}$  est atomique sur  $A$  et  $\mathfrak{N}$  est atomique sur  $B$ , alors tout isomorphisme élémentaire partiel  $\sigma_0 : A \rightarrow B$  se prolonge en un isomorphisme.*

2. *Deux modèles saturés de même cardinal  $\lambda$  d'une théorie complète sont isomorphes. Plus précisément, tout isomorphisme élémentaire partiel  $\sigma_0 : A \rightarrow B$  de deux parties de cardinal  $< \lambda$  se prolonge en un isomorphisme.*

**DÉMONSTRATION:** Si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont deux modèles de la même théorie complète, l'application vide est un isomorphisme partiel. Donc l'isomorphie des modèles est une conséquence de la possibilité de prolongement.

Dans le cas 1. on pose  $\lambda = \omega$ . Soient  $(m_i : i < \lambda)$  et  $(n_i : i < \lambda)$  des énumérations de  $M \setminus A$  et de  $N \setminus B$ . On va construire une suite d'isomorphismes partiels  $(\sigma_i : i < \lambda)$  de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{N}$ , tels que  $\sigma_i$  étend  $\sigma_j$  pour  $j > i$ , et pour tout  $i \geq 0$ , le domaine de  $\sigma_i$  contient  $\{m_k : k < i\}$ , et l'image de  $\sigma_i$  contient  $\{n_k : k < i\}$ , avec  $|\text{dom}(\sigma_i) \setminus A| = |\text{im}(\sigma_i \setminus B)| \leq 2 \cdot |i|$ . Alors  $\sigma = \bigcup_{i < \lambda} \sigma_i$  sera l'isomorphisme entre  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$ .

Supposons qu'on a trouvé  $\sigma_i$ , et soit  $A_i$  le domaine et  $B_i$  l'image de  $\sigma_i$ . Dans le cas 1. le type  $\text{tp}(m_i/A_i)$  est isolé par une formule  $\varphi(x, A_i)$  d'après le

lemme 4.13 ; comme  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, A_i)$  et  $\sigma_i$  est élémentaire,  $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, B_i)$ ; soit  $n \in N$  tel que  $\mathfrak{N} \models \varphi(n, B_i)$ . Comme  $\sigma_i$  est élémentaire,  $\varphi(x, A_i)$  isole  $\text{tp}(n/B_i) = \sigma_i(\text{tp}(m_i/A_i))$ . Donc on peut étendre  $\sigma_i$  en envoyant  $m_i$  à  $n$ . De même, comme  $\text{tp}(n_i/B_i, n)$  est isolé par une formule  $\psi(x, B_i, n)$ , on trouve  $m \in M$  réalisant  $\psi(x, A_i, m_i)$ .

Dans le cas 2. le type  $\sigma_i(\text{tp}(m_i/A_i))$  est réalisé dans  $\mathfrak{N}$  par un élément  $n$  par saturation de  $\mathfrak{N}$ , si  $\sigma' = \sigma \cup \{m_i \mapsto n\}$ , le type  $\sigma'^{-1}(\text{tp}(n_i/B_i, n))$  est réalisé dans  $\mathfrak{M}$  par un élément  $m$  par saturation de  $\mathfrak{M}$ . Ceci ajoute au plus deux éléments au domaine et à l'image, ce qui conserve la condition sur leur cardinalité. On pose

$$\sigma_{i+1} : x \mapsto \begin{cases} \sigma_i(x) & \text{si } x \in A_i \\ n & \text{si } x = m_i \\ n_i & \text{si } x = m. \end{cases}$$

Si on a obtenu une suite  $(\sigma_j : j < i)$  d'isomorphismes partiels pour un ordinal limite  $i$ , alors  $\sigma_i = \bigcup_{j < i} \sigma_j$  est aussi un isomorphisme partiel ; avec

$$|\text{dom}(\sigma_{i+1}) \setminus A| = |\text{im}(\sigma_{i+1} \setminus B)| \leq |i| \cdot 2 \cdot |i| = 2 \cdot |i|$$

pour  $i$  infini. ■

**Exemple 5.5** 1.  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$  et  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  sont atomiques,  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  est saturé, mais  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$  n'est pas saturé : il omet le 2-type qui dit que la distance entre  $x$  et  $y$  est infini.

2.  $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$  est atomique; sa théorie n'a pas de modèle saturé de cardinal  $\omega$  : pour tout ensemble  $P$  de nombres premiers il y a le type qui dit que  $x$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $p \in P$ ; ça fait  $2^\omega$  types sur  $\emptyset$  qu'on ne peut pas tous réaliser dans un modèle dénombrable.

3.  $\tilde{\mathbb{Q}}$  et  $\tilde{\mathbb{F}}_p$  sont les corps algébriquement clos atomiques.  $\mathbb{C}$  est saturé (de cardinal  $2^\omega$ ), et  $\mathbb{Q}(x_i : i < \omega)$  est saturé dénombrable.

**Exemple 5.6** Voici une théorie qui n'a pas de modèle atomique: Le langage comporte un ordre  $<$  et un prédicat unaire  $P$ ; on considère la théorie de  $\mathbb{R}$ , ou on a ajouté une constante pour chaque rationnel  $q \in \mathbb{Q}$ , et  $P$  est interprété par  $\mathbb{Q}$ . Alors tout modèle contiendra une copie de  $\mathbb{Q}$ ; on peut construire un modèle  $\mathfrak{M}$  de façon que pour une certaine coupure irrationnel sur  $\mathbb{Q}$  toute

réalisation satisfait  $P$ . Mais s'il y a un modèle atomique  $\mathfrak{M}_0$ , il s'injecte dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathfrak{M}$ , et toutes les réalisations de cette coupure dans  $\mathfrak{M}_0$  satisfont à la fois  $\neg P$  et  $P$ . Donc il n'y en a pas; comme on peut repeter avec chaque coupure irrationnel, aucune telle coupure est réalisée dans  $\mathfrak{M}_0$ . Mais  $\mathfrak{M}_0$  s'injecte dans  $\mathbb{R}$  et ne réalise que des coupures irrationnelles. Ça signifie que la domaine de  $\mathfrak{M}_0$  est  $\mathbb{Q}$ , et  $\mathfrak{M}_0$  ne comporte aucun élément réalisant  $\neg P$ , contradiction.

**Exercice 5.7** Pour tout  $\mathfrak{M}$  et tout  $\lambda$  il y a une extension élémentaire  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  qui est  $\lambda$ -saturée.

**Exercice 5.8** Si  $|\mathcal{L}| \leq \lambda$  et  $\lambda^+ = 2^\lambda$ , une théorie complète a un modèle saturé de cardinal  $\lambda^+$ .

**Définition 5.9** Soit  $\lambda$  un cardinal infini. Une théorie  $T$  est  $\lambda$ -catégorique si tous les modèles de cardinal  $\lambda$  sont isomorphes.

- Exemple 5.10**
1. La théorie des ordres denses sans extrémités est  $\omega$ -catégorique.
  2. La théorie des groupes abéliens d'exposant  $p$  premier est  $\lambda$ -catégorique pour tout  $\lambda$ .
  3. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée est  $\lambda$ -catégorique pour tout  $\lambda$  non-dénombrable.

**Théorème 5.11** RYLL-NARDZEWSKI, SVENONIUS, ENGELER *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une théorie complète dénombrable :*

1.  $T$  est  $\omega$ -catégorique.
2. Pour chaque  $n < \omega$  il n'y a qu'un nombre fini de formules inéquivalentes modulo  $T$  à  $n$  variables libres  $x_1, \dots, x_n$ .
3.  $S_n(T)$  est fini pour chaque  $n < \omega$ .

DÉMONSTRATION: Si  $S_n(T)$  est fini, on trouve facilement des formules isolant les types dans  $S_n(T)$ ; une formule en  $n$  variables libres sera donc équivalente à une combinaison booléenne de ces formules. L'équivalence 2.  $\Leftrightarrow$  3. en découle.

Si  $S_n(T)$  est fini pour chaque  $n$ , alors chaque type sur  $\emptyset$  est isolé et tout modèle de  $T$  est atomique; par le théorème 5.4 deux modèles dénombrables sont isomorphes.

Réciproquement, si  $T$  est  $\omega$ -catégorique, comme tout type non-isolé sur  $\emptyset$  peut être ou bien réalisé ou bien omis dans un modèle dénombrable par le théorème d'omission des types, tout type sur  $\emptyset$  est principal. Pour  $n < \omega$  soient  $\{\varphi_i(\bar{x}) : i \in I\}$  toutes les formules qui isolent un  $n$ -type. Si  $I$  est infini, alors par compacité l'ensemble  $\{\neg\varphi_i(\bar{x}) : i \in I\}$  est consistant et on peut le compléter en un type  $p(\bar{x})$ . Mais  $p$  est principal, et la formule isolant  $p(\bar{x})$  doit figurer parmi les formules  $\varphi_i(\bar{x})$ , ce qui contredit que  $p$  contient  $\neg\varphi_i(\bar{x})$  pour tout  $i$ . ■

**Définition 5.12** Une théorie complète est *menue* si  $S(T)$  est dénombrable.

**Proposition 5.13** Une théorie dénombrable menue a un modèle atomique dénombrable et un modèle saturé dénombrable.

Evidemment, s'il y a un modèle saturé dénombrable,  $T$  est menue.

DÉMONSTRATION: Notons d'abord que comme un type  $\text{tp}(\bar{a}/\bar{b})$  est déterminé par  $\text{tp}(\bar{a}\bar{b})$ , sur tout ensemble fini dans un modèle de  $T$  il n'y a qu'un nombre dénombrable de types.

Construisons d'abord le modèle saturé. Soit  $\mathfrak{M}_0$  n'importe quel modèle dénombrable. Alors il y a  $\bigcup_{n < \omega} \omega^n = \bigcup_{n < \omega} \omega = \omega \cdot \omega = \omega$  sous-ensembles finis de  $\mathfrak{M}_0$ , et sur chacun il n'y a qu'un nombre dénombrable de types. Il y a  $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_0$  qui réalise tous ces types; par le théorème de Löwenheim-Skolem on peut choisir  $\mathfrak{M}_1$  dénombrable. Mais ensuite on trouve  $\mathfrak{M}_2 \succ \mathfrak{M}_1$  dénombrable qui réalise tous les types sur les sous-ensembles finis de  $\mathfrak{M}_1$ , et on obtient récursivement une chaîne élémentaire  $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2 \prec \dots$ , telle que  $\mathfrak{M}_{i+1}$  est dénombrable et réalise tous les types sur les ensembles finis de  $\mathfrak{M}_i$ . Alors  $\mathfrak{M} = \bigcup_{i < \omega} \mathfrak{M}_i$  sera une extension élémentaire dénombrable saturée de  $\mathfrak{M}_0$ .

Quant au modèle atomique, on va le construire comme sous-structure élémentaire de n'importe quel modèle dénombrable  $\mathfrak{M}$  de  $T$ . Soit  $\bar{a}$  un uple fini de  $M$ , et  $\varphi(x, \bar{a})$  une formule consistante :  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$ .

**Lemme 5.14** Il y a un type isolé  $p(x) \in S_1(\bar{a})$  qui contient  $\varphi(x, \bar{a})$ .

DÉMONSTRATION: Supposons qu'aucune formule consistante  $\psi(x, \bar{a})$  qui implique  $\varphi(x, \bar{a})$  isole un type sur  $\bar{a}$ . Alors on trouve une  $\mathcal{L}(\bar{a})$ -formule  $\varphi_1(x)$

telle que  $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \varphi_\emptyset(x)$  et  $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\varphi_\emptyset(x)$  sont consistantes; ensuite on divise la première en deux par une formule  $\varphi_0(x)$ , et la deuxième par une formule  $\varphi_1(x)$ . Plus généralement, pour toute suite  $(s_i : i \leq n) \in \{0, 1\}^n$  et  $\mathcal{L}(\bar{a})$ -formules  $\varphi_{(s_i:i < k)}(x)$  pour  $k \leq n$  telles que

$$\varphi(x, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{k \leq n} \neg^{s_k} \varphi_{(s_i:i < k)}(x)$$

est consistant (où  $\neg^0\psi$  est  $\psi$  et  $\neg^1\psi$  est  $\neg\psi$ ), on trouve une  $\mathcal{L}(\bar{a})$ -formule  $\varphi_{(s_i:i \leq n)}(x)$  telle que

$$\varphi(x, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{k \leq n} \neg^{s_k} \varphi_{(s_i:i < k)}(x) \wedge \neg^{s_{n+1}} \varphi_{(s_i:i \leq n)}(x)$$

est consistante pour  $s_{n+1} = 0$  et  $s_{n+1} = 1$ . Récursivement on trouve donc des formules  $\varphi_{\bar{s}}$  pour toute suite fini binaire  $\bar{s}$ , telles que pour toute suite *infini*  $s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \{0, 1\}^\omega$

$$p_s(x) = \varphi(x, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{k < \omega} \neg^{s_k} \varphi_{(s_i:i < k)}(x)$$

est consistant. Mais les completions des différents  $p_s(x)$  donnent  $2^\omega$  types sur  $\bar{a}$ , contradiction. ■

Soit  $(\varphi_i(x, \bar{a}_i) : i < \omega)$  une énumération de toutes les formules à paramètres dans  $\mathfrak{M}$  qui isolent un type sur  $\bar{a}_i$ . On pose  $A_0 = \emptyset$ ; si on a trouvé  $A_i$ , soit  $j < \omega$  minimal telle que  $\bar{a}_j \in A_i$  et  $\varphi_j(x, \bar{a}_j)$  n'a pas de réalisation dans  $A_i$ . Par le lemme, on trouve une  $\mathcal{L}(A_i)$ -formule qui implique  $\varphi_j(x, \bar{a}_j)$  et isole un type sur  $A_i$ ; on ajoute une réalisation de ce type (qui doit exister dans  $\mathfrak{M}$ ) pour obtenir  $A_{i+1}$ . A la fin, on pose  $A = \bigcup_{i < \omega} A_i$ .

$A$  est atomique par le lemme 4.13, comme chaque  $A_{i+1}$  est atomique sur  $A_i$ . Il contient toutes les constantes, comme  $x = c$  isole un type pour chaque  $c \in \mathcal{C}$ , et est clos par les fonctions, comme  $x = f(\bar{a})$  isole un type sur  $\bar{a}$ . Donc  $A$  est une sous-structure de  $\mathfrak{M}$ ; elle est élémentaire par le test de Tarski : Si  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$  avec  $\bar{a} \in A$ , il y a une formule  $\varphi_i(x, \bar{a})$  qui implique  $\varphi(x, \bar{a})$  et isole un type sur  $\bar{a}$ . Mais si  $\bar{a} \in A_j$ , alors  $\varphi_i(x, \bar{a})$  est réalisé dans  $A_{j+i}$  au plus tard. ■

# Chapitre 6

## Élimination des quanteurs et modèle-complétude

**Définition 6.1** Une théorie  $T$  *élimine les quanteurs* si toute formule  $\varphi(\bar{x})$  est équivalente modulo  $T$  à une formule sans quanteurs.

L'élimination des quanteurs dépend du langage choisi :

**Remarque 6.2** Soit  $T$  une théorie quelconque. Pour toute formule  $\varphi(\bar{x})$  on rajoute une nouvelle relation  $R_\varphi(\bar{x})$  au langage, et l'axiome  $\forall \bar{x} [\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})]$  à la théorie, pour former le langage  $\mathcal{L}'$  et la théorie  $T'$ . Alors  $T'$  élimine facilement les quanteurs : une  $\mathcal{L}$ -formule  $\varphi$  est équivalente à  $R_\varphi$  ; quant aux  $\mathcal{L}'$ -formules on remplace d'abord les éventuelles sous-formules  $R_\psi$  par  $\psi$  pour obtenir une  $\mathcal{L}$ -formule équivalente.

Le changement de langage a pour effet de changer la notion de sous-structure : si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont deux modèles de  $T$  avec  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , ils ont des expansions canoniques à des modèles de  $T'$  en interprétant

$$R_\varphi^{\mathfrak{M}} := \{\bar{m} \in M : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})\}$$

(et similairement pour  $\mathfrak{N}$ ). Mais comme  $\mathcal{L}'$ -structures on a  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$  si et seulement si  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ .

**Proposition 6.3** *Une théorie  $T$  élimine les quanteurs si pour tous modèles  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  de  $T$  deux uples  $\bar{m} \in \mathfrak{M}$  et  $\bar{n} \in \mathfrak{N}$  qui satisfont les mêmes formules atomiques (dans leurs modèles respectifs) satisfont les mêmes formules. Plus généralement, si  $\mathcal{E}$  est un ensemble de formules tel que dans tous modèles  $\mathfrak{M}$*

et  $\mathfrak{N}$  de  $T$  deux uples qui satisfont les mêmes formules dans  $\mathfrak{E}$  ont même type, alors toute formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules dans  $\mathfrak{E}$ .

On appelle un tel ensemble  $\mathfrak{E}$  un *ensemble d'élimination*. Il est nécessaire que l'hypothèse soit satisfaite pour tous modèles  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  de  $T$ , et tous  $\bar{m} \in \mathfrak{M}, \bar{n} \in \mathfrak{N}$ . Notons que la réciproque est évidente. DÉMONSTRATION: Supposons qu'une formule  $\varphi(\bar{x})$  n'est pas équivalente modulo  $T$  à une combinaison booléenne de formules dans  $\mathfrak{E}$ . Soient  $\bar{c}, \bar{d}$  des nouvelles constantes, et considérons

$$\Phi := T \cup \{\psi(\bar{c}) \leftrightarrow \psi(\bar{d}) : \psi \in \mathfrak{E}\} \cup \{\varphi(\bar{c}), \neg\varphi(\bar{d})\}.$$

Si  $\Phi$  est finiment satisfaisable, on peut trouver un modèle  $\mathfrak{M}$  de  $\Phi$  entier, dans lequel  $\bar{c}^{\mathfrak{M}}$  et  $\bar{d}^{\mathfrak{M}}$  satisfont les mêmes formules de  $\mathfrak{E}$ , mais pas les mêmes formules, en contradiction avec nos hypothèses. Donc il y a une partie finie  $T_0 \cup \{\psi_i(\bar{c}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{d}) : i < n\} \cup \{\varphi(\bar{c}), \neg\varphi(\bar{d})\}$  qui n'a pas de modèle, où  $T_0 \subseteq T$ . Par conséquent, dans chaque modèle  $\mathfrak{M} \models T$  la formule  $\varphi$  est équivalente à une des  $2^{2^n}$  combinaisons booléennes des  $\{\psi_i : i < n\}$ .

Si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont deux modèles de  $T$  qui satisfont les mêmes énoncés dans  $\mathfrak{E}$ , ils sont élémentairement équivalents par hypothèse (appliquée aux uples vides) ; en particulier  $\varphi$  est équivalente dans  $\mathfrak{M}$  à la même combinaison booléenne des  $\psi_i$  que dans  $\mathfrak{N}$ . Par compacité, un nombre fini d'énoncés dans  $\mathfrak{E}$  vrais dans  $\mathfrak{M}$  suffit à impliquer, modulo  $T$ , que  $\varphi$  est équivalente à une combinaison booléenne  $\vartheta_{\mathfrak{M}}$  particulière ; soit  $\sigma_{\mathfrak{M}}$  leur conjonction.

Comme il y a au plus  $|\mathcal{L}| + \omega$  énoncés dans  $\mathfrak{E}$ , par compacité il y en a un nombre fini  $\sigma_{\mathfrak{M}_0}, \dots, \sigma_{\mathfrak{M}_k}$  tels que tout modèle en satisfait un. On obtient que  $\varphi(\bar{x})$  est équivalent modulo  $T$  à  $\bigvee_{i \leq k} [\vartheta_{\mathfrak{M}_i}(\bar{x}) \wedge \sigma_{\mathfrak{M}_i}]$ . ■

**Théorème 6.4** *Une théorie  $T$  élimine les quanteurs si pour tous modèles  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  de  $T$  deux uples  $\bar{m} \in M$  et  $\bar{n} \in N$  qui satisfont les mêmes formules atomiques satisfont les mêmes formules de la forme  $\exists x\varphi(x, \bar{y})$ , où  $\varphi$  est sans quanteur.*

DÉMONSTRATION: Soient  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  eux modèles de  $T$  et  $\bar{m} \in M$  et  $\bar{n} \in N$  deux uples qui satisfont les mêmes formules atomiques. On trouve des extensions élémentaires  $\omega$ -saturées  $\mathfrak{M}_0 \succeq \mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}_0 \succeq \mathfrak{N}$ . Il suffit de voir que la famille d'isomorphismes partiels de  $\mathfrak{M}_0$  dans  $\mathfrak{N}_0$  de domaine fini est

karpienne : puisque  $\bar{m} \mapsto \bar{n}$  est un tel isomorphisme, il sera élémentaire par le lemme 4.6. On peut alors appliquer la proposition 6.3.

Soit donc  $\sigma$  un isomorphisme partiel de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{N}$  qui envoie  $\bar{m}'$  à  $\bar{n}'$ . Il nous suffit de trouver pour chaque  $m_0 \in M$  un  $n_0 \in N$ , et vice versa, tel que  $\bar{m}'m_0 \mapsto \bar{n}'n_0$  est un isomorphisme partiel.

Par symétrie il suffit de considérer  $m_0 \in M$  ; soit  $\Phi(\bar{m}', x)$  l'ensemble des formules sans quanteurs satisfaites par  $m_0$  dans  $\mathfrak{M}$ . Pour chaque sous-ensemble  $\Phi_0(\bar{m}', x)$  fini de  $\Phi$  on a  $\mathfrak{M} \models \exists x \wedge \Phi_0(\bar{m}', x)$  ; par hypothèse  $\mathfrak{N} \models \exists x \wedge \Phi_0(\bar{n}', x)$ , et par  $\omega$ -saturation on trouve  $n_0 \in N$  tel que  $\mathfrak{N} \models \Phi(\bar{n}', n_0)$ . ■ L'élimination des quanteurs a une conséquence bien importante.

**Définition 6.5** Une théorie  $T$  est *modèle-complète* si toute inclusion de modèles de  $T$  est élémentaire.

**Proposition 6.6** Une théorie qui élimine les quanteurs est modèle-complète.

DÉMONSTRATION: Soient  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  des modèles de  $T$  avec  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , et  $\varphi(\bar{m})$  un énoncé à paramètres dans  $\mathfrak{M}$ . Alors  $\varphi(\bar{x})$  est équivalent dans tout modèle de  $T$  à une formule  $\psi(\bar{x})$  sans quanteurs, et

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}). \quad \blacksquare$$

**Exemple 6.7** La  $\mathcal{L}_{ann}$ -théorie de  $\mathbb{R}$  est modèle-complète, mais n'élimine pas les quanteurs :  $\exists y y^2 = x$  n'est pas équivalente à une formule sans quanteurs. On verra dans le chapitre suivant que  $\mathbb{R}$  élimine les quanteurs si on ajoute l'ordre au langage.

**Théorème 6.8** Une théorie est modèle-complète si et seulement si toute formule est équivalente modulo  $T$  à une formule existentielle.

DÉMONSTRATION: Si toute formule est équivalente à une formule existentielle, considérons deux modèles  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , et une formule  $\varphi(\bar{m})$  vraie dans  $\mathfrak{M}$ . Elle est équivalente à une formule  $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{m})$ , et on trouve  $\bar{n} \in M$  tels que  $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$ . Donc  $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$ , et  $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{m})$ , d'où  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ . On a bien  $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ .

Réciproquement, supposons que  $T$  soit modèle-complète, et considérons deux modèles  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  de  $T$ , ainsi que deux uples  $\bar{m} \in M$  et  $\bar{n} \in N$ . Supposons

que les formules existentielles satisfaites par  $\bar{m}$  dans  $\mathfrak{M}$  forment un sous-ensemble des formules existentielles satisfaites par  $\bar{n}$  dans  $\mathfrak{N}$ . Soient  $\{c_m : m \in M\}$  des nouvelles constantes, et considérons

$$\Phi = \text{Th}(\mathfrak{N}, N) \cup \{\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}, \bar{n}) : \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_k, \bar{m}), \varphi \text{ atomique}\}.$$

Chaque sous-ensemble fini  $\Phi_0(\bar{c}, \bar{n})$  de  $\Phi$  est interpretable dans  $\mathfrak{N}$ , comme  $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \wedge \Phi_0(\bar{x}, \bar{m})$  implique que  $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \wedge \Phi_0(\bar{x}, \bar{n})$ . Donc il y a un modèle  $\mathfrak{N}'$  de  $\Phi$ , extension élémentaire de  $\mathfrak{N}$ , qui contient une copie de  $\mathfrak{M}$ , l'ensemble  $\mathfrak{M}' = \{c_m^{\mathfrak{M}'} : m \in M\}$ , comme sous-structure ; notons que l'uple correspondant à  $\bar{m}$  est  $\bar{n}$ . Par modèle-complétude  $\mathfrak{M}' \preceq \mathfrak{N}'$ . Pour chaque formule on a

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N}' \models \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n}).$$

Donc  $\bar{m}$  et  $\bar{n}$  satisfont les mêmes formules. Par la proposition 6.3 chaque formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules existentielles.

Il nous reste de voir qu'une formule universelle  $\varphi(\bar{x})$  est équivalente à une formule existentielle. Soit  $\Phi(\bar{x})$  la collection des formules existentielles en  $\bar{x}$  qui impliquent  $\varphi(\bar{x})$  modulo  $T$ , et

$$\Psi(\bar{x}) = \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})\}.$$

Soient  $\bar{c}$  des nouvelles constantes, et supposons que

$$T \cup \Psi(\bar{c}) \cup \{\varphi(\bar{c})\}$$

a un modèle  $\mathfrak{M}$ . Si  $\Phi_0(\bar{x})$  est la collection des formules existentielles satisfaites par  $\bar{c}^{\mathfrak{M}}$ , alors  $T \cup \Phi_0(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$  n'a pas de modèle ( $\bar{c}$  et  $\bar{d}$  doivent satisfaire les mêmes formules par la première partie de la preuve), et il y a une partie finie  $\Phi'_0(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$  qui est inconsistante avec  $T$ . Mais ça signifie que  $\psi(\bar{x}) := \bigwedge \Phi'_0(\bar{x})$  implique  $\varphi(\bar{x})$  modulo  $T$ . Donc  $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ , et  $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\bar{c})$ , en contradiction avec  $\mathfrak{M} \models \Phi'_0(\bar{c})$ .

Il y a donc une partie finie  $\Psi_0(\bar{x})$  de  $\Psi(\bar{x})$  telle que  $T \cup \Psi_0(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$  est inconsistent. Donc  $\bigwedge \Psi_0(\bar{x})$  implique  $\neg\varphi(\bar{x})$  modulo  $T$ , et  $\varphi(\bar{x})$  implique

$$\psi_0(\bar{x}) := \bigvee \{\psi(\bar{x}) : \neg\psi(\bar{x}) \in \Psi_0(\bar{x})\}$$

modulo  $T$ . Comme  $\psi(\bar{x})$  implique  $\varphi(\bar{x})$  modulo  $T$  pour toute  $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ , la formule  $\varphi(\bar{x})$  est équivalente à  $\psi_0(\bar{x})$ . ■

**Exemple 6.9** La théorie ACF des corps algébriquement clos élimine les quanteurs.

DÉMONSTRATION: Rappelons que ACF est consisté de la théorie des corps, ainsi que pour chaque  $n < \omega$  de l'énoncé

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x x^n + y_1 x^{n-1} + \dots + y_n = 0.$$

Soient  $K$  et  $L$  deux corps algébriquement clos, et  $\bar{a} \in K$  et  $\bar{b} \in L$  deux uples qui satisfont les mêmes formules atomiques. Alors  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  engendrent des sous-corps  $A$  et  $B$  isomorphes. Considérons une formule  $\varphi(x, \bar{y})$  sans quanteurs ; c'est une disjonction finie de formules de la forme  $\bigwedge_{i \in I} f_i(x, \bar{y}) = 0 \wedge \bigwedge_{j \in J} g_j(x, \bar{y}) \neq 0$ , où les  $f_i$  et  $g_j$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Comme tous les  $g_j$  sont différents de 0 si et seulement si  $\prod_{j \in J} g_j \neq 0$ , on peut supposer  $|J| \leq 1$ .

Si  $\bigwedge_i f_i(x, \bar{a}) = 0$  définit un ensemble fini dans  $K$  (éventuellement vide), il est contenu dans la clôture algébrique  $\tilde{A}$  de  $A$ , ainsi que toutes les solutions de  $\varphi(x, \bar{a})$ . De l'autre côté, si  $\bigwedge_i f_i(x, \bar{a}) = 0$  définit un ensemble infini dans  $K$  (ce sont donc des équations polynômiales triviales), c'est  $K$  entier, et  $\varphi(x, \bar{a})$  définit un ensemble co-fini. La clôture algébrique étant infinie,  $\varphi(x, \bar{a})$  a une solution dans  $\tilde{A}$ .

Dans les deux cas,  $\varphi(x, \bar{a})$  a une solution dans  $K$  si et seulement si  $\varphi(x, \bar{a})$  a une solution dans  $\tilde{A}$ . De même,  $\varphi(x, \bar{b})$  a une solution dans  $L$  si et seulement s'il a une solution dans  $\tilde{B}$ . Or, l'isomorphie de  $A$  et  $B$  implique l'isomorphie de leurs clôtures algébriques ; on voit que  $\varphi(x, \bar{a})$  a une solution dans  $\tilde{A}$  (c'est-à-dire dans  $K$ ) si et seulement si  $\varphi(x, \bar{b})$  a une solution dans  $\tilde{B}$  (c'est-à-dire dans  $L$ ). Donc  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  satisfont les mêmes énoncés de la forme  $\exists x \varphi(x, \bar{y})$  ; par le théorème 6.4 ACF élimine les quanteurs. ■

La modèl-complétude nous donne par un court raisonnement algébrique le fameux théorème des zéros de Hilbert.

**Proposition 6.10** *Si  $K$  est un corps algébriquement clos, alors tout système fini  $\varphi(\bar{x})$  d'équations et d'inéquations à coefficients dans  $K$  qui a une solution dans un corps  $L$  extension de  $K$  a déjà une solution dans  $K$  lui-même.*

DÉMONSTRATION: Soit  $\tilde{L}$  la clôture algébrique de  $L$ . Alors  $\varphi(\bar{x})$  a une solution dans  $\tilde{L}$  ; car  $K \preceq \tilde{L}$  par modèl-complétude,  $K \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ . ■

**Théorème 6.11** NULLSTELLENSATZ *Soit  $K$  un corps algébriquement clos, et  $f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}), g(\bar{x})$  des polynômes sur  $K$ . Si tout zéro commun de  $f_1, \dots, f_m$  est aussi un zéro de  $g$ , alors il y a  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $g^k$  est dans l'idéal engendré par  $f_1, \dots, f_m$ .*

DÉMONSTRATION: On met  $f_0(\bar{x}, z) = 1 - g(\bar{x})z$ , et on considère l'idéal  $I$  dans  $K[\bar{x}, z]$  engendré par  $f_0, f_1, \dots, f_m$ .

Supposons que  $I < K[\bar{x}, z]$ . Alors  $I$  est contenu dans un idéal propre maximal  $M$ , et  $K[\bar{x}, z]/M$  est un corps  $L$ . Car  $M$  ne peut contenir aucun élément invertible de l'anneau,  $K$  s'injecte canoniquement dans  $L$  par  $a \mapsto a + M$ ; ceci induit une injection  $\sigma : K[\bar{X}, Z] \rightarrow L[\bar{X}, Z]$  des anneaux polynômiaux en  $\bar{X}Z$ .

On voit facilement que les polynômes  $f_0(\bar{X}, Z), \dots, f_m(\bar{X}, Z)$  ont un zéro commun  $(x_0 + M, \dots, x_n + M, z + M)$ , car

$$f_i(x_0 + M, \dots, x_n + M, z + M) = f_i(x_0, \dots, x_n, z) + M \in M.$$

Donc  $f_0, \dots, f_m$  ont un zéro commun dans  $K$ , qui est impossible, car tout zéro commun  $\bar{x}_0$  de  $f_1, \dots, f_m$  annule  $g$ , d'où  $f_0(\bar{x}_0, z) = 1$ .

Alors  $I = K[\bar{x}, z]$ , et il y a des polynômes  $p_i(x, z) \in K[\bar{x}, z]$  pour  $i \leq m$  tels que  $\sum_{i=0}^m p_i f_i = 1$ ; en mettant  $z = 1/g(\bar{x})$  et en multipliant par une large puissance  $g^d$  de  $g$ , on obtient polynômes  $\tilde{p}_i(\bar{x}) = g^d(\bar{x})p_i(\bar{x}, 1/g(\bar{x})) \in K[\bar{x}]$  tels que

$$g^d(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \tilde{p}_i(\bar{x}) f_i(\bar{x}). \quad \blacksquare$$

**Proposition 6.12** 1. *La théorie  $ACF_p$  d'un corps algébriquement clos de caractéristique donné  $p$  est complète : tout énoncé  $\varphi$  sans paramètres est soit vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , soit faux dans tout corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ . De même pour les énoncés à paramètres  $\bar{a}$ , pourvu que les corps contiennent le corps engendré par  $\bar{a}$ .*

2. *Soit  $\varphi$  un énoncé sans paramètres. Alors  $\varphi$  est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle si et seulement si  $\varphi$  est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ , pour tout  $p$  premier sauf un nombre fini.*

DÉMONSTRATION:

1. La première partie découle de la deuxième, car tout corps de caractéristique donnée contient le sous-corps engendré par 0 et 1 (le corps premier). Soit donc  $\varphi(\bar{a})$  un énoncé à paramètres  $\bar{a}$ , et  $K$  et  $L$  deux corps algébriquement clos contenant le corps  $A$  engendré par  $\bar{a}$ . Alors  $\bar{a}$  satisfait les mêmes formules sans quanteurs dans  $K$ , dans  $A$  et dans  $L$ , et donc les mêmes formules ; en particulier  $K \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow L \models \varphi(\bar{a})$ .
2. Pour un énoncé  $\varphi$  considérons  $\Phi = \text{ACF}_0 \cup \{\varphi\}$ . S'il y a des corps algébriquement clos de caractéristique arbitrairement grande qui satisfont  $\varphi$ , alors chaque partie finie de  $\Phi$  a un modèle, comme elle ne peut contenir qu'un nombre fini d'axiomes de la forme  $1 + \dots + 1 \neq 0$ . Donc  $\Phi$  a un modèle, un corps algébriquement clos de caractéristique 0 qui satisfait  $\varphi$ , et  $\varphi$  est vrai dans chaque tel corps.

Pour la réciproque on considèrera  $\neg\varphi$ . ■

En particulier, tout énoncé est soit vrai en toute caractéristique sauf un nombre fini, soit faux en toute caractéristique sauf un nombre fini.

**Exemple 6.13** La  $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\leq\}$ -théorie RCF des *corps réels clos* consiste de :

1. La théorie des corps.
2.  $\leq$  est un ordre total qui satisfait
  - (a) si  $x \leq y$ , alors  $x + z \leq y + z$  ;
  - (b) si  $x \leq y$  et  $z \geq 0$ , alors  $xz \leq yz$  ;
  - (c) si  $x \leq y$  et  $z \leq 0$ , alors  $xz \geq yz$ .
3. Si  $f(x) \in K[x]$  et  $a \leq b$  sont tels que  $f(a)f(b) < 0$ , alors il y a  $x \in [a, b]$  avec  $f(x) = 0$ . (Ceci se dit par un énoncé pour chaque degré du polynôme  $f$ .)

Les énoncés 1. et 2. axiomatisent la théorie des corps *ordonnés* ; on va voir que chaque corps ordonné se plonge dans un corps réel clos. Un corps ordonné est nécessairement de caractéristique 0 ; comme  $a < \frac{a+b}{2} < b$  pour  $a < b$ , l'ordre est dense et sans extrémité, car  $x - 1 < x < x + 1$ . Pour chaque  $a \neq 0$  soit  $a > 0$ , soit  $-a > 0$  ; on dénote par  $|a|$  celui qui est positif. On peut montrer que  $a$  est positif si et seulement si  $a^{-1}$  l'est, et que l'inégalité du triangle  $|a + b| \leq |a| + |b|$  est satisfaite.

**Remarque 6.14** On peut remplacer l'ordre total de la condition 2. par un prédicat unaire  $\geq 0$  tel que

- 2'. (a) on a  $-1 \not\geq 0$ , et pour tout  $x$ , soit  $x \geq 0$ , soit  $-x \geq 0$  ;  
 (b) si  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , alors  $x + y \geq 0$  et  $xy \geq 0$ .

Ensuite on définit un ordre total  $x \geq y$  si et seulement si  $x - y \geq 0$ .

**Remarque 6.15**  $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, \leq \rangle$  est un corps réel clos ; notons qu'il n'est pas  $\omega$ -saturé : l'ensemble  $\{x > n : n \in \mathbb{N}\}$  est finiment réalisable dans  $\mathbb{R}$ , mais n'a pas de réalisation dans  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 6.16** *Chaque corps ordonné  $K$  se plonge dans un corps  $L$  réel clos algébrique sur  $K$ .*

DÉMONSTRATION: Par le lemme de Zorn,  $K$  a une extension  $L$  (de corps ordonné) maximal algébrique ;  $L$  est un sous-corps de la clôture algébrique  $\tilde{K}$  de  $K$  (qui n'est pas ordonnée, car  $-1$  y est un carré). Supposons que  $a < b$  et  $f(x) \in L[x]$  est de degré minimal tel que  $f(a) > 0 > f(b)$ , mais  $f$  n'a pas de zéro dans  $(a, b)$  ; notons que  $f$  est nécessairement irréductible. Soit

$$A = \{c \in L : \exists x \in (a, b) [c \leq x \wedge f(x) > 0]\}.$$

Notons que  $A$  n'a pas d'élément maximal : si  $f(c) > 0$ , il y a  $\epsilon > 0$  (qui se calcule en fonction de  $f(c)$  et des coefficients de  $f$ ) tel que  $f$  est positif sur  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  ; de même  $B := L - A$  n'a pas d'élément minimal.

Soit  $\alpha$  une racine de  $f$  dans  $\tilde{K}$ . Alors  $L(\alpha) \cong L[x]/(f(x))$  ; chaque élément dans  $L(\alpha)$  a un (et un seul) représentant  $g$  qui est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\deg(f)$ . Si  $g \neq 0$ , comme  $g(x)$  n'a qu'un nombre fini de zéros, et donc qu'un nombre fini de changements de signe par minimalité du degré de  $f$ , il y a un segment final de  $A$  et un segment initial de  $B$  tel que  $g(x)$  y est positif (et on dira que  $g > 0$ ) ou négatif (et  $g < 0$ ). Il est évident que soit  $g \geq 0$ , soit  $-g \geq 0$ , et que la somme de deux représentants positifs est positif. Quant au produit, on peut écrire  $g_1 \cdot g_2 = g_3 \cdot f + g_4$ , où  $g_4$  est le représentant du produit  $g_1 \cdot g_2$ , de degré strictement inférieur à  $\deg(f)$  ; comme  $g_3$  est également de degré strictement inférieur à  $\deg(f)$ , il y a un segment final  $A_0$  de  $A$  et un segment initial  $B_0$  de  $B$  tels que les polynômes  $g_1, g_2, g_3, g_4$  ont signe constant sur  $A_0 \cup B_0$ . Si  $g_1$  et  $g_2$  sont positifs, comme  $f$  change signe sur  $A_0 B_0$  et  $g_3(x) \cdot f(x)$  est donc négatif pour un  $x \in A_0 \cup B_0$ ,

il est impossible que  $g_4$  soit négatif. Ceci montre que nous venons de définir un ordre qui étend l'ordre de  $K$ , et qui place  $\alpha$  (qui est représenté par  $x$ ) dans la coupure déterminée par  $A$ .

Comme ça contredit la maximalité de  $L$ , le lemme est montré. ■

On appelle un tel corps  $L$  une clôture réelle, notons qu'elle n'a pas d'éléments infinitésimaux (ni infiniment grands), puisqu'un tel élément ne peut pas annuler un polynôme sur  $K$ . En général, un corps  $K$  a beaucoup de clôtures réelles dans sa clôture algébrique. Si  $L^*$  en est une, pour un  $\alpha \in L^* - K$  de degré minimal soit  $f$  son polynôme minimal. Soit  $g \in K[X]$  un polynôme de degré minimal tel que  $g$  a un zéro dans la coupure déterminée par  $\alpha$  dans une clôture réelle. Alors  $g$  n'y a pas de deuxième zéro (sinon  $g'$  y en aurait un), et il existent  $a < \alpha < b$  dans  $K$  tel que  $g$  change signe dans  $(a, b)$ , et son seul zéro dans  $(a, b)$  est dans la même coupure que  $\alpha$ . Donc  $g$  a un zéro dans cette coupure qui est dans  $L^* - K$ ; par minimalité  $g$  et  $f$  ont même degré, et  $f$  aussi change signe dans un interval de  $K$  autour de  $\alpha$ . L'ordre sur  $K(\alpha)$  est complètement déterminé par la coupure  $\{a \in K : a < \alpha\}$  et le polynôme minimal  $f$  de  $\alpha$  : En fait, si  $g(x) \in K[x]$  avec  $\deg(g) < \deg(f)$  est positif dans un interval de  $K$  autour de  $\alpha$ , alors  $g(\alpha) > 0$  (sinon  $g$  ou une de ses dérivées aurait un zéro dans la coupure déterminée par  $\alpha$ , en contradiction avec la minimalité du degré de  $f$ ). De même, si  $g(x) < 0$  autour de  $\alpha$ , alors  $g(\alpha) < 0$ . On voit donc que toute clôture réelle s'obtient par une suite (possiblement transfinie) d'adjonctions de tels éléments.

**Corollaire 6.17** *Soit  $\sigma : K_1 \rightarrow K_2$  un isomorphisme de corps ordonnés, et  $L_i$  une clôture réelle de  $K_i$  pour  $i = 1, 2$ . Alors  $\sigma$  s'étend en un isomorphisme de  $L_1$  à  $L_2$ .*

DÉMONSTRATION: Pour chaque polynôme  $f(x) \in K_1[x]$  qui change de signe  $n$  fois dans  $(a, b)$  le polynôme  $\sigma(f)(x)$  change de signe  $n$  fois dans  $(\sigma(a), \sigma(b))$ ; comme  $L_2$  est réel clos, pour un zéro  $\alpha$  de  $f$  dans  $L_1$  on trouve un zéro  $\alpha'$  de  $\sigma(f)$  dans  $L_2$  avec  $\sigma(\{a \in K_1 : a < \alpha\}) = \{b \in K_2 : b < \alpha'\}$ . Cette application s'étend en un isomorphisme de corps ordonnés  $K_1(\alpha)$  et  $K_2(\alpha')$ . Réciproquement, pour tout  $\alpha' \in L_2$  on trouve  $\alpha_1 \in L_1$  tel que  $\sigma$  se prolonge en un isomorphisme de  $K_1(\alpha)$  à  $K_2(\alpha')$ . Par va-et-vient, on construit itérativement un isomorphisme de  $L_1$  à  $L_2$  prolongeant  $\sigma$ . ■

**Théorème 6.18** *La théorie des corps réel clos est complète et élimine les quanteurs.*

DÉMONSTRATION: Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux corps réels clos (qu'on peut supposer  $\omega$ -saturés), et  $\bar{a} \in K_1$  et  $\bar{b} \in K_2$  deux uples qui satisfont les mêmes formules atomiques. Alors les sous-corps  $A$  et  $B$  engendrés par  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  sont isomorphes. Notons que les clôtures algébriques relatives  $\tilde{A} \cap K_1$  et  $\tilde{B} \cap K_2$  sont réels clos, et donc isomorphes. Alors, si  $a_0 \in K_1$  est algébrique sur  $A$ , on trouve  $b_0 \in K_2$  tel que  $\bar{a}a_0$  et  $\bar{b}b_0$  engendrent des corps ordonnés isomorphes : les deux uples satisfont les mêmes formules atomiques.

Si  $a_0 \in K_1$  est transcendant sur  $A$ , alors  $A(a_0)$  est isomorphe au corps des fonctions rationnelles  $A(x)$ , et l'ordre est déterminé par la coupure  $\{a \in A : a < a_0\}$ . Par  $\omega$ -saturation on trouve  $b_0 \in K_2$  transcendant sur  $B$ , tel que  $b_0^n$  réalise la coupure correspondante à celle de  $a_0^n$ . (Cet ensemble est finiment consistant, comme l'ordre est dense sans extrémité, et la condition pour  $mn$  implique celle pour  $n$ ). Puisque la somme de deux coupures est une coupure, et le produit d'une coupure par un élément du corps est une coupure, la donnée des coupures de toutes les puissances d'un élément transcendant détermine l'ordre sur l'anneau, et donc aussi le corps, engendré. Par conséquent,  $A(a_0)$  et  $B(b_0)$  sont isomorphes comme corps ordonnés, c'est-à-dire  $\bar{a}a_0$  et  $\bar{b}b_0$  satisfont les mêmes formules atomiques.

Par le théorème 6.4, RCF élimine les quantificateurs. C'est une théorie complète car  $\mathbb{R} \cap \tilde{\mathbb{Q}}$ , la clôture réelle des rationnels, s'injecte élémentairement dans tout modèle. ■

**Exercice 6.19** Montrer qu'un corps ordonné est dense dans sa clôture réelle.

# Chapitre 7

## Indiscernables et stabilité

**Définition 7.1** Soit  $\mathfrak{M}$  une structure,  $A \subseteq M$ , et  $(\bar{a}_i : i \in I)$  une suite d'uples de même longueur dans  $M$ , où  $I$  est un ensemble d'indices ordonné infini. La suite est *indiscernable* sur  $A$  si pour chaque  $n < \omega$  et tout  $i_1 < \dots < i_n$  et  $j_1 < \dots < j_n$  on a  $\text{tp}(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_n}/A) = \text{tp}(\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_n}/A)$ .

**Remarque 7.2** Soit  $(\bar{a}_i : i \in I)$  une suite indiscernable sur  $A$  dans une structure  $\mathfrak{M}$ . Alors par compacité pour tout ensemble ordonné  $J$  infini il y a  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  et une suite indiscernable  $(\bar{a}'_j : j \in J) \subset N$  sur  $A$  dont les sous-suites finis ont même type sur  $A$  que les sous-suites finis de  $(\bar{a}_i : i \in I)$ .

Pour construire des suites indiscernables, on a besoin d'un théorème combinatoire :

**Théorème 7.3** THÉORÈME DE RAMSEY Soit  $X$  un ensemble infini dont les parties de taille  $n$  sont colorés en  $k$  couleurs. Alors il y a un sous-ensemble  $Y \subseteq X$  infini monochrome.

DÉMONSTRATION: Par récurrence sur  $n$ , l'énoncé étant évident si  $n = 1$ . Considérons donc une coloration des  $(n+1)$ -parties de  $X$  ; fixant  $x_0 \in X$  on obtient par hypothèse de récurrence un sous-ensemble infini  $X_0 \subseteq X \setminus \{x_0\}$  et une couleur  $k_0 < k$  tel que pour tout  $n$ -uplet  $\bar{x}$  de  $X_0$  l'ensemble  $x_0\bar{x}$  porte la couleur  $k_0$ . Récursivement on obtient une suite  $X = X_{-1} \supseteq X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots$  de sous-ensembles infinis, des éléments  $x_i \in X_{i-1} \setminus X_i$ , et des couleurs  $k_i$ , tels que pour chaque  $n$ -partie  $\bar{x}$  dans  $X_i$  l'ensemble  $x_i\bar{x}$  porte la couleur  $k_i$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de couleurs, il y a un sous-ensemble infini  $I \subseteq \omega$  et une couleur  $k'$  tels que  $k_i = k'$  pour tout  $i \in I$ . Alors l'ensemble  $Y = \{x_i : i \in I\}$  sera monochrome. ■

**Remarque 7.4** Par compacité pour tout  $k, m, n < \omega$  il y a un entier  $R(k, m, n)$  tel que pour toute coloriage des parties de taille  $n$  d'un ensemble de cardinal  $R(k, m, n)$  avec  $k$  couleurs il y a un sous-ensemble monochrome de taille  $m$ .

**Théorème 7.5** Soit  $\mathfrak{M}$  une structure,  $A \subseteq M$ , et  $(\bar{a}_i : i < \omega)$  une suite infinie d'uples de même longueur dans  $M$ . Alors il y a une extension élémentaire  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  et une suite indiscernable  $(\bar{a}'_i : i < \omega)$  sur  $A$  dans  $\mathfrak{N}$ , telles que toute  $\mathcal{L}(A)$ -formule  $\varphi(\bar{x}_i : i < n)$  satisfaite par  $(\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_n)$  est satisfaite par une  $n$ -sous-suite de  $(\bar{a}_i : i < \omega)$ .

DÉMONSTRATION: Pour toute suite finie de  $\mathcal{L}(A)$ -formules  $\Delta = \{\varphi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) : i \leq k\}$  le théorème de Ramsey nous donne un sous-ensemble infini  $X_\Delta \subseteq \omega$  tel que soit  $\mathfrak{M} \models \varphi_i(\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_n})$  pour tous  $j_1 < \dots < j_n$  dans  $X_\Delta$ , soit  $\mathfrak{M} \models \neg \varphi_i(\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_n})$  pour tous  $j_1 < \dots < j_n$  dans  $X_\Delta$ , comme satisfaction de ces formules nous donne une  $2^k$ -coloration des  $n$ -uples dans  $(\bar{a}_i : i < \omega)$ . Donc, si  $(\bar{c}_i : i < \omega)$  sont des nouvelles constantes,

$$\begin{aligned} \text{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup & \bigcup_{\substack{i_1 < \dots < i_n \\ j_1 < \dots < j_n}} \{ \varphi(\bar{c}_{i_1}, \dots, \bar{c}_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(\bar{c}_{j_1}, \dots, \bar{c}_{j_n}) : \varphi \in \mathcal{L}(A) \} \\ & \cup \left\{ \varphi(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) : \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{L}(A), \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_n}) \\ \text{pour tout } i_1 < \dots < i_n < \omega \end{array} \right\} \end{aligned}$$

est finiment réalisable dans  $\mathfrak{M}$ , et a un modèle  $\mathfrak{N}$ , extension élémentaire de  $\mathfrak{M}$ ; on prend  $\bar{a}'_i = \bar{c}_i^{\mathfrak{N}}$  pour  $i < \omega$ . ■

En fait, si la suite initiale est plus longue, on peut faire mieux.

**Fait 7.6** Soit  $\mathfrak{M}$  une structure,  $A \subseteq M$ , et  $(\bar{a}_i : i < \beth_{(2^{|T|})^+})$  une suite dans  $M$ . Alors il y a une extension élémentaire  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  et une suite indiscernable  $(\bar{a}'_i : i < \omega)$  sur  $A$  dans  $\mathfrak{N}$ , telles que pour tout  $n < \omega$  le type des  $n$ -uples de  $(\bar{a}'_i : i < \omega)$  est satisfait par un  $n$ -uplet dans  $(\bar{a}_i : i < \beth_{(2^{|T|})^+})$ .

**Théorème 7.7** Soit  $T$  une  $\mathcal{L}$ -théorie dénombrable avec un modèle infini. Alors pour chaque cardinal  $\lambda$  infini il y a un modèle  $\mathfrak{M}$  de  $T$  de cardinal  $\lambda$  qui ne réalise que  $|A|$  types sur chaque ensemble infini  $A \subseteq M$ .

DÉMONSTRATION: On va raisonner dans  $\mathcal{L}_{Skolem}$ . Soit  $\mathfrak{N}$  un modèle dénombrable de  $T_{Skolem}$ . Par le théorème 7.5 on trouve une extension élémentaire

$\mathfrak{N}'$  de  $\mathfrak{N}$  qui contient une suite indiscernable  $(a_i : i < \lambda)$  avec  $a_0 \neq a_1$  (on l'obtient à partir de n'importe quel énumération de  $N$ ). Soit  $\mathfrak{M}$  la sous-structure de  $\mathfrak{N}'$  engendrée par  $(a_i : i < \lambda)$ ; par le lemme 2.23 elle est incluse élémentairement dans  $\mathfrak{N}'$  pour le langage  $\mathcal{L}$  original.

Soit  $A \subseteq M$  infini, et  $\bar{a} \in M$ ; on doit calculer le nombre de possibilités pour  $\text{tp}(\bar{a}/A)$ . Mais  $A$  est engendré par une partie  $(a_i : i \in I)$  de la suite indiscernable, de cardinal  $|I| = |A|$ ; il suffira donc de compter les types sur  $(a_i : i \in I)$  réalisés dans  $\mathfrak{M}$ . Chaque  $a \in \bar{a}$  est engendré par un nombre fini d'éléments dans la suite indiscernable; le type sur  $(a_i : i \in I)$  d'un uple  $\bar{a}' \in (a_i : i < \lambda)$  qui engendre  $\bar{a}$ , ainsi que  $\text{tp}(\bar{a}/\bar{a}')$ , déterminera  $\text{tp}(\bar{a}/a_i : i \in I)$ . Comme  $\bar{a}$  est engendré à partir de  $\bar{a}'$  par les fonctions et les fonctions de Skolem, il n'y a qu'un nombre dénombrable de possibilités. Il suffit donc de compter le possibilités pour  $\text{tp}(\bar{a}'/a_i : i \in I)$ ; comme  $(a_i : i < \lambda)$  est indiscernable, ce type est déterminé par les coupures des  $a' \in \bar{a}'$  dans  $(a_i : i \in I)$ . Comme il n'y a que  $|I|$  coupures (la coupure d'un  $a' \notin (a_i : i \in I)$  est déterminée par le plus petit élément au dessus, s'il y en a), il n'y a que  $|I| = |A|$  types.

Tout ceci est vrai pour les types au sens de  $\mathcal{L}_{Skolem}$ , et a fortiori pour les  $\mathcal{L}$ -types. ■

**Corollaire 7.8** *Soit  $T$  une théorie dénombrable catégorique en  $\lambda$  non-dénombrable. Alors  $S(\mathfrak{M})$  est dénombrable pour chaque modèle dénombrable de  $T$ .*

DÉMONSTRATION: Sinon, on trouve  $\mathfrak{M} \models T$  dénombrable, et  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  de cardinal  $\lambda$  qui réalise un nombre non-dénombrable de types sur  $\mathfrak{M}$ . Mais par catégoricité  $\mathfrak{N}$  est isomorphe au modèle donné par le théorème 7.7, une contradiction. ■

**Définition 7.9** Une théorie  $T$  est  $\lambda$ -stable si  $|S(\mathfrak{M})| = \lambda$  pour tout modèle  $\mathfrak{M} \models T$  de cardinal  $\lambda \geq |T|$ . Une théorie  $T$  est *stable* si elle est  $\lambda$ -stable pour un  $\lambda \geq |T|$ . Une structure est  $(\lambda)$ -stable si sa théorie l'est.

- Exemple 7.10**
1. Un ordre total infini est instable.
  2. Un groupe abélien  $A$  est stable; il est  $\omega$ -stable si et seulement si  $A$  est la somme directe d'un groupe divisible avec un groupe d'exposant borné.
  3. Un corps algébriquement clos est  $\omega$ -stable, et même catégorique en tout cardinal non-dénombrable.

Le corollaire 7.8 affirme qu'une théorie catégorique en  $\lambda$  non-dénombrable est  $\omega$ -stable.

**Remarque 7.11** En fait, la démonstration montre qu'une théorie catégorique en  $\lambda$  est  $\kappa$ -stable pour tout  $\kappa < \lambda$  infini.

Enfin, on peut lier la stabilité aux suites indiscernables.

**Définition 7.12** Soit  $\mathfrak{M}$  une structure,  $A \subseteq M$  et  $\{\bar{a}_i : i \in I\}$  un ensemble d'uples de même longueur dans  $M$ . L'ensemble est *indiscernable* sur  $A$  si pour chaque  $n < \omega$  et tout  $i_1, \dots, i_n$  et  $j_1, \dots, j_n$  distincts dans  $I$  on a  $\text{tp}(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_n}/A) = \text{tp}(\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_n}/A)$ .

**Définition 7.13** Une formule  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  a la *propriété d'ordre* par rapport à une théorie  $T$  s'il y a un modèle  $\mathfrak{M} \models T$  et des uples  $(\bar{a}_i, \bar{b}_i : i < \omega)$  dans  $M$  tels que  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Leftrightarrow i < j$ . Une théorie  $T$  a la propriété d'ordre s'il y a une formule qui l'a par rapport à  $T$ .

**Théorème 7.14** Une théorie stable n'a pas la propriété d'ordre.

DÉMONSTRATION: Soit  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  une formule avec la propriété d'ordre par rapport à  $T$ . Pour un cardinal  $\lambda \geq |T|$  soit  $I$  un ordre total de cardinal  $\lambda$  avec  $2^\lambda$  coupures. Par compacité (et Löwenheim-Skolem descendant) on trouve un modèle  $\mathfrak{M} \models T$  de cardinal  $\lambda$  et des uples  $(\bar{a}_i, \bar{b}_i : i \in I)$  tels que  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Leftrightarrow i < j$ . Alors chaque segment initial  $J$  de  $I$  donne lieu à un type partiel

$$\{\varphi(\bar{a}_i, \bar{y}) \wedge \neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i \in J\} \cup \{\neg\varphi(\bar{a}_i, \bar{y}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i \in J\}.$$

Ces types partiels sont deux-à-deux contradictoires et se complètent en  $2^\lambda$  types sur  $\mathfrak{M}$ , en contradiction avec la stabilité. ■

**Corollaire 7.15** Une suite indiscernable dans une structure stable  $\mathfrak{M}$  est un ensemble indiscernable.

DÉMONSTRATION: Sinon, on trouve un ensemble  $A \subseteq M$ , une suite indiscernable  $(\bar{a}_i : i < \omega)$  sur  $A$  dans  $M$ , et une formule  $\varphi$  tels que

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\models \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n), \text{ mais} \\ \mathfrak{M} &\models \neg\varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n). \end{aligned}$$

On prolonge la suite en une suite indexée par  $\omega \hat{\omega} \omega$ , et prend  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}$  dans la première et  $\bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n$  dans la troisième copie de  $\omega$ . Alors la formule

$$\varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n)$$

a la propriété d'ordre, en contradiction avec la stabilité. ■

**Remarque 7.16** La réciproque est aussi vraie : Une théorie est stable si et seulement si toute suite indiscernable est un ensemble indiscernable, si et seulement si elle n'a pas la propriété d'ordre.

**Théorème 7.17** *Soit  $\mathfrak{M}$  stable. Alors pour toute formule  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  il y a un  $n_\varphi < \omega$  tel que pour toute suite infinie indiscernable  $\{\bar{a}_i : i \in I\}$  et tout  $\bar{m} \in M$ , soit  $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{m})$  pour tout  $i \in I$  sauf au plus  $n_\varphi$ , soit  $\mathfrak{M} \models \neg \varphi(\bar{a}_i, \bar{m})$  pour tout  $i \in I$  sauf au plus  $n_\varphi$ .*

DÉMONSTRATION: Sinon, par compacité on trouve  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ , une suite infinie indiscernable  $\{\bar{a}_i : i \in I\}$  et  $\bar{m}_0 \in N$  tel que  $J = \{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{m}_0)\}$  est infini et co-infini. Par indiscernabilité de l'ensemble  $\{\bar{a}_i : i \in I\}$  et compacité on peut supposer que  $I = \mathbb{Z}$  et  $J = \mathbb{N}$ ; encore par indiscernabilité pour tout  $z \in \mathbb{Z}$  on trouve  $\bar{m}_z$  (dans une extension élémentaire  $\mathfrak{N}'$ ) tel que  $\mathfrak{N}' \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{m}_z) \Leftrightarrow i \geq z$ . Donc  $\varphi$  a la propriété d'ordre et  $T$  n'est pas stable par le théorème 7.14. ■

# Chapitre 8

## Indépendance et simplicité

Dans ce chapitre nous allons travailler dans une grande structure  $\mathfrak{M}$  saturée appelé *modèle monstre*, et tous les modèles qu'on considèrera en seront des sous-structures élémentaires de cardinal strictement inférieur. De même, tous les ensembles de paramètres seront de cardinal strictement inférieur. Ceci ne restreint pas la généralité des arguments, mais nous évite de passer à des extensions élémentaires. On écrira  $A \equiv_B A'$  pour  $(\mathfrak{M}, AB) \equiv (\mathfrak{M}, A'B)$ , où encore  $\text{tp}(A/B) = \text{tp}(A'/B)$  ; notons que par saturation ça signifie qu'il y a un automorphisme de  $\mathfrak{M}$  qui fixe  $B$  et envoie  $A$  sur  $A'$ .

**Définition 8.1** Une relation ternaire  $X \downarrow_Z Y$  entre sous-ensembles (du modèle monstre) est une *relation d'indépendance* si elle satisfait les axiomes suivantes :

(invariance) Si  $A \downarrow_C B$  et  $ABC \equiv A'B'C'$ , alors  $A' \downarrow_{C'} B'$ .

(anti-reflexivité) Si  $A \downarrow_B A$  alors  $A \subset \text{acl}(B)$ .

(monotonie) Si  $A \downarrow_C B$  et  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ , alors  $A' \downarrow_{C'} B'$ .

(monotonie de base) Si  $D \subseteq C \subseteq B$  et  $A \downarrow_D B$ , alors  $A \downarrow_C B$ .

(transitivité) Si  $D \subseteq C \subseteq B$ , alors  $B \downarrow_C A$  et  $C \downarrow_D A$  implique  $B \downarrow_D A$ .

(normalité) Si  $A \downarrow_C B$ , alors  $AC \downarrow_C B$ .

(extension) Si  $A \downarrow_C B$  et  $B' \supseteq B$ , alors il y a  $A' \equiv_{BC} A$  avec  $A' \downarrow_{C'} B'$ .

(caractère fini) Si  $A_0 \downarrow_C B_0$  pour tout  $A_0 \subseteq A$  et  $B_0 \subseteq B$  fini, alors  $A \downarrow_C B$ .

(caractère local) Pour tout  $A$  il y a un cardinal  $\kappa(A)$  tel que pour tout  $B$  il y a  $C \subseteq B$  de cardinalité  $|C| \leq \kappa(A)$  avec  $A \downarrow_C B$ .

**Exemple 8.2** Indépendance linéaire dans un espace vectoriel et indépendance algébrique dans un corps sont des relations d'indépendance.

**Lemme 8.3** Soit  $\downarrow$  une relation d'indépendance.

1. (normalité à droite) Si  $A \downarrow_C B$ , alors  $A \downarrow_C BC$ .
2. Si  $B \downarrow_{CD} A$  et  $C \downarrow_D A$ , alors  $BC \downarrow_D A$ .
3. Si  $A \downarrow_D BC$  et  $B \downarrow_D C$ , alors  $AB \downarrow_D C$ .

DÉMONSTRATION:

1. Si  $A \downarrow_C B$ , par extension il y a  $A' \equiv_{BC} A$  tel que  $A' \downarrow_C BC$ . Alors  $A \downarrow_C BC$  par invariance.
2. On a  $BCD \downarrow_{CD} A$  et  $CD \downarrow_D A$  par normalité, donc  $BCD \downarrow_D A$  par transitivité, et  $BC \downarrow_D A$  par monotonie.
3. On a  $A \downarrow_D BCD$  par normalité à droite, donc  $A \downarrow_{BD} BCD$  par monotonie de base, et  $A \downarrow_{BD} C$  par monotonie. Avec  $B \downarrow_D C$ , la transitivité implique  $AB \downarrow_D C$ . ■

**Définition 8.4** Soit  $\downarrow$  une relation d'indépendance,  $p$  un type sur  $B \supseteq C$ , et  $I$  un ordre total infini. Une suite de Morley en  $p$  de type  $I$  sur  $C$  est une suite  $(\bar{a}_i : i \in I)$  de réalisations de  $p$  indiscernable sur  $B$  telle que  $(\bar{a}_i : i < n) \downarrow_C \bar{a}_n$  pour tout  $n \in I$ . Une suite de Morley en  $p$  est une suite de Morley en  $p$  de type  $\omega$  sur  $B$ .

**Remarque 8.5** Si  $(\bar{a}_i : i \in I)$  est indiscernable sur  $BC$  et contient une sous-suite de Morley en  $p \in S(B)$  sur  $C$ , alors par caractère fini et indiscernabilité la suite entière est une suite de Morley en  $p$  sur  $C$ .

**Proposition 8.6** Soit  $\downarrow$  une relation d'indépendance et  $\bar{a} \downarrow_C B$ . Alors il existe une suite de Morley en  $\text{tp}(\bar{a}/BC)$  sur  $C$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $\bar{a}_0 = \bar{a}$ . Par récursion et extension on construit une suite  $(\bar{a}_i : i < \beth_{(2|T|)^+})$  de réalisations de  $\text{tp}(\bar{a}/BC)$  telle que  $\bar{a}_i \downarrow_C (\bar{a}_j : j < i)$  pour tout  $i < \omega$ . Par le fait 7.6 et la remarque 7.2 il y a une suite  $(\bar{a}'_i : i \leq 0)$  indiscernable sur  $BC$  telle que pour tout  $n < \omega$  le type de ses  $n$ -uplets est réalisé par un  $n$ -uplet dans  $(\bar{a}_i : i < \beth_{(2|T|)^+})$ . Alors  $\bar{a}'_i \models \text{tp}(\bar{a}/BC)$  pour tout  $i \leq 0$ . Par caractère fini, invariance et monotonie,  $\bar{a}'_i \downarrow_C (\bar{a}'_k : i > k > j)$  pour tout  $j < i \leq 0$ . Le lemme 8.3.3 donne  $(\bar{a}'_i : i > n) \downarrow_C \bar{a}'_n$  récursivement pour tout  $n \leq 0$ . La suite  $(\bar{a}'_{-i} : i < \omega)$  est la suite de Morley sur  $C$  recherché. ■

**Théorème 8.7** Soit  $\downarrow$  une relation d'indépendance, et  $A \downarrow_C B$ . Alors  $B \downarrow_C A$  (symétrie).

**DÉMONSTRATION:** Par la proposition 8.6 et remarques 7.2 et 8.5 il y a une suite de Morley  $(A_i : i < \kappa(B)^+)$  en  $\text{tp}(A/BC)$  sur  $C$ . Le caractère local nous donne  $D \subset C \cup \bigcup_{i < \kappa(B)^+} A_i$  de cardinal  $|C| < \kappa(B)$  tel que  $B \downarrow_D C \cup \bigcup_{i < \kappa(B)^+} A_i$ . Alors il y a  $\alpha < \kappa(B)^+$  tel que  $D \subset C \cup \bigcup_{i < \alpha} A_i$ ; par monotonie et monotonie de base  $B \downarrow_{C \cup \bigcup_{i < \alpha} A_i} A_\alpha$ .

Comme  $(A_i : i < \alpha) \downarrow_C A_\alpha$ , le lemme 8.3.2 et monotonie donne  $B \downarrow_C A_\alpha$ . Puisque  $A \equiv_{BC} A_\alpha$ , la symétrie en découle. ■

**Définition 8.8** Une formule  $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$  *divise* sur  $C$  s'il y a une suite indiscernable  $(\bar{b}_i : i < \omega)$  en  $\text{tp}(\bar{b}/C)$  telle que  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < \omega\}$  est inconsistent. La formule *devie* sur  $C$  si elle implique une disjonction finie de formules qui divisent sur  $C$ .

Un type  $\text{tp}(A/BC)$  *divise* (*devie*) sur  $C$  s'il contient une formule qui le fait.

**Proposition 8.9** Si  $\text{tp}(A/BC)$  ne divise pas sur  $C$  et  $(B_i : i \in I)$  est une suite  $C$ -indiscernable en  $\text{tp}(B/C)$  alors il y a  $A'$  tel que  $A'B_i \equiv_C AB$  pour tout  $i \in I$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $\Phi(X, B) = \text{tp}(A/BC)$ . Puisque aucune formule dans  $\text{tp}(A/BC)$  ne divise sur  $C$ , l'ensemble  $\bigcup_{i \in I} \Phi(X, B_i)$  est consistant, et réalisé par un  $A'$ . ■

**Théorème 8.10** La relation  $A \downarrow_C B$  si  $\text{tp}(A/BC)$  ne devie pas sur  $C$  satisfait tous les axiomes d'une relation d'indépendance, sauf éventuellement caractère local.

**DÉMONSTRATION:** Invariance, anti-relexivité, monotonie, monotonie de base, normalité et caractère fini sont évidents. Pour l'extension, si  $A \downarrow_C B$  et  $B' \supseteq B$ , soit  $\Phi$  la collection de formules avec paramètres dans  $B'$  qui devient sur  $C$ . Si  $\text{tp}(A/BC) \models \bigvee \Phi$ , alors par compacité il y a une partie finie  $\Phi_0 \subseteq \Phi$  telle que  $\text{tp}(A/BC) \models \bigvee \Phi_0$ . Mais  $\bigvee \Phi_0$  implique lui-même une disjonction finie de formules qui divisent sur  $C$ , et cette disjonction est aussi conséquence de  $\text{tp}(A/BC)$ , une contradiction. Donc  $\text{tp}(A/BC) \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$  est consistant ; une réalisation  $A'$  satisfait  $A' \equiv_{BC} A$  et  $A' \downarrow_C B'$ .

Pour la transitivité, supposons que  $B \not\downarrow_D A$ . Soit  $A' \supseteq A$  tel que  $\text{tp}(B/DA)$  implique une disjonction finie de formules avec paramètres dans  $A'$  qui divisent sur  $D$ . Puisque extension est satisfaite, on trouve d'abord  $C' \equiv_{DA} C$  avec  $C' \downarrow_D A$ , et ensuite  $B'C' \equiv_{DA} BC$  avec  $B' \downarrow_{C'} A'$ . En bref, on peut supposer que  $\text{tp}(B/DA)$  divise sur  $D$ . Soit  $(A_i : i < \omega)$  une suite indiscernable sur  $D$  en  $\text{tp}(A/D)$ . Comme  $C \downarrow_D A$ , la proposition 8.9 nous donne un  $C' \equiv_D C$  tel que  $C'A_i \equiv_D CA$  pour tout  $i < \omega$ . Par le théorème 7.5 il y a une suite  $(A'_i : i < \omega)$  indiscernable sur  $C'$  telle que ses  $n$ -uplets ne réalisent que des formules sur  $C'$  réalisées par des  $n$ -uplets de  $(A_i : i < \omega)$ . Puisque  $B \downarrow_C A$ , par invariance et la proposition 8.9 on trouve  $B'C' \equiv BC$  tel que  $B'C'A'_i \equiv BCA$  pour tout  $i < \omega$ . Donc pour toute formule  $\varphi(X, D, A) \in \text{tp}(B/DA)$  et tout  $n < \omega$  on a  $B' \models \bigwedge_{i < n} \varphi(X, D, A'_i)$ . Ainsi  $\models \exists X \bigwedge_{i < n} \varphi(X, D, A'_i)$ , et donc  $\models \exists X \bigwedge_{i < n} \varphi(X, D, A_i)$ . Comme  $\varphi$  et la suite  $(A_i : i < \omega)$  étaient arbitraire,  $\text{tp}(B/DA)$  ne divise pas sur  $D$ , une contradiction. ■

**Définition 8.11** Une structure est *simple* si la non-deviation satisfait au caractère local (dans une extension élémentaire monstre). Une théorie est simple si tous ses modèles le sont.

**Définition 8.12** Soit  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  une formule et  $k < \omega$ . Le rang  $D(\cdot, \varphi, k)$  est défini récursivement sur les types partiels (à paramètres dans  $M$ ) par

- $D(\pi(\bar{x}), \varphi, k) \geq 0$  si  $\pi(\bar{x})$  est consistant.
- $D(\pi(\bar{x}), \varphi, k) \geq n + 1$  s'il y a une suite  $(\bar{b}_i : i < \omega)$  telle que  $D(\pi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_i), \varphi, k) \geq n$  pour tout  $i < \omega$ , et  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < \omega\}$  est  $k$ -inconsistant (toute sous-collection de  $k$  formules est inconsistante).

On note  $D(\bar{a}/B, \varphi, k)$  pour  $D(\text{tp}(\bar{a}/B), \varphi, k)$ .

**Remarque 8.13** Soit  $\pi(\bar{x}, A)$  un type partiel sur  $A$ .

1. Si  $\pi \models \pi'$ , alors  $D(\pi, \varphi, k) \leq D(\pi', \varphi, k)$  pour tout  $\varphi, k$ .
2. Par compacité, si  $D(\pi, \varphi, k) < n$ , alors il y a une partie finie  $\pi_0 \subseteq \pi$  telle que  $D(\pi_0, \varphi, k) < n$ , et il y a une formule  $\vartheta \in \text{tp}(A)$  telle que  $D(\pi_0(\bar{x}, A'), \varphi, k) < n$  pour tout  $A' \models \vartheta$ .
3. Pour tout  $n$  il y a un type partiel  $\Theta_n(X)$  tel que  $D(\pi(\bar{x}, A'), \varphi, k) \geq n$  si et seulement si  $A \models \Theta_n$ .

**Exercice 8.14** On peut supposer que  $(\bar{b}_i : i < \omega)$  est indiscernable sur les paramètres de  $\pi$ .

Rappel : Pour deux ensembles  $X$  et  $Y$ , l'ensemble des fonctions de  $X$  dans  $Y$  est noté  $Y^X$ .

**Exercice 8.15** Si  $D(\pi, \varphi, k) \geq n$  pour tout  $n < \omega$ , alors pour tout ordinal  $\alpha$  il y a des uples  $\{\bar{b}_\eta : \eta \in \bigcup_{\beta < \alpha} \omega^\beta\}$  tels que :

- Pour  $\bar{\eta} \in \omega^\alpha$ , l'ensemble  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\bar{\eta} \upharpoonright \beta}) : \beta < \alpha\}$  (les branches de l'arbre) est consistant avec  $\pi$ .
- Pour tout  $\beta + 1 < \alpha$  et  $\eta \in \omega^\beta$  l'ensemble  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\eta \frown i}) : i < \omega\}$  est  $k$ -inconsistent.

En plus, on peut supposer  $\{\bar{b}_{\eta \frown i} : i < \omega\}$  indiscernable sur  $(\bar{b}_{\eta \upharpoonright \gamma} : \gamma \leq \beta)$  et les paramètres de  $\pi$ .

**Lemme 8.16** Soit  $\pi$  un type partiel sur  $B$  avec  $D(\pi, \varphi, k) \geq n$ . Alors on peut compléter  $\pi$  en un type complet  $p \in S(B)$  avec  $D(p, \varphi, k) \geq n$ .

**DÉMONSTRATION:** On montre par récurrence que pour toute formule  $\psi$  soit  $D(\pi \wedge \psi, \varphi, k) \geq n$ , soit  $D(\pi \wedge \neg\psi, \varphi, k) \geq n$ . On peut alors compléter  $\pi$  en rajoutant une formule (ou sa négation) après l'autre en préservant le rang. Par la remarque 8.13.2 le rang est préservé aux étapes limite.

Pour  $n = 0$ , si  $\pi$  est consistant, soit  $\pi \wedge \psi$ , soit  $\pi \wedge \neg\psi$  est consistant. Si  $D(\pi, \varphi, k) \geq n+1$ , soit  $(\bar{b}_i : i < \omega)$  une suite telle que  $D(\pi \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_i), \varphi, k) \geq n$  pour tout  $i < \omega$  et  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < \omega\}$  est  $k$ -inconsistent. Alors par hypothèse de récurrence pour tout  $i < \omega$  soit  $D(\pi \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) \wedge \psi, \varphi, k) \geq n$ , soit  $D(\pi \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) \wedge \neg\psi, \varphi, k) \geq n$ . Il y a  $I \subseteq \omega$  tel que la même possibilité est vrai pour tout  $i \in I$ , et la suite  $(\bar{b}_i : i \in I)$  témoigne soit que  $D(\pi \wedge \psi, \varphi, k) \geq n+1$ , soit que  $D(\pi \wedge \neg\psi, \varphi, k) \geq n+1$ . ■

**Théorème 8.17** *Une théorie est simple si et seulement si  $D(., \varphi, k) < \omega$  pour toute formule  $\varphi$  et tout  $k < \omega$ . Dans ce cas,  $\bar{a} \downarrow_C B$  si et seulement si  $D(\bar{a}/C, \varphi, k) = D(\bar{a}/BC, \varphi, k)$ .*

DÉMONSTRATION: S'il y a une formule  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  et un  $k < \omega$  telle que  $D(\pi, \varphi, k) = \infty$ , soit  $\alpha = \sup\{\kappa(\bar{a}) : |\bar{a}| = |\bar{x}|\}^+$  et  $\{\bar{b}_\eta : \eta \in \bigcup_{\beta < \alpha} \omega^\beta\}$  les uples donnés par l'exercice 8.15. Soit  $\bar{\eta} \in \omega^\alpha$  et soit  $\bar{a}$  une réalisation de  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\bar{\eta} \upharpoonright \beta}) : \beta < \alpha\}$ . Alors pour tout  $\beta < \alpha$  l'ensemble  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_{\bar{\eta} \upharpoonright \beta \cdot i}) : i < \omega\}$  témoigne que  $\text{tp}(\bar{a}/\bar{b}_{\bar{\eta} \upharpoonright \gamma} : \gamma \leq \beta)$  divise sur  $\{\bar{b}_{\bar{\eta} \upharpoonright \gamma} : \gamma < \beta\}$ , ce qui contredit le caractère local.

Supposons maintenant  $D(\pi, \varphi, k) < \omega$  pour tout  $\pi, \varphi, k$ . On va montrer que  $D(\bar{a}/BC, \varphi, k) = D(\bar{a}/C)$  si et seulement si  $\bar{a} \downarrow_C B$ . Supposons donc que  $D(\bar{a}/BC, \varphi, k) = D(\bar{a}/C, \varphi, k)$  pour tout  $\varphi, k$ , mais que  $\bar{a} \not\downarrow_C B$ . Soit  $B' \supseteq BC$  tel que  $\text{tp}(\bar{a}/BC$  implique une disjonction finie  $\bigvee_{i < n} \varphi_i(\bar{x}, \bar{b}_i)$  de  $\mathcal{L}(B')$ -formules qui  $k_i$ -divisent sur  $C$ , et soit

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \bigvee_{i < n} \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i) \wedge z = c_i,$$

où  $c_0, \dots, c_{n-1}$  sont des constantes distincts de  $B'$ . Soit  $k = \max\{k_i : i < n\}$  et  $p \in S(B')$  une complétion de  $\text{tp}(\bar{a}/BC)$  avec

$$D(p, \psi, k) = D(\bar{a}/BC, \psi, k) = D(\bar{a}/C, \psi, k).$$

Alors  $\psi(\bar{x}, \bar{b}, c) \in p$ , avec  $\bar{b} = (\bar{b}_i : i < n)$  et  $c \in \{c_i : i < n\}$ , et cette formule  $k$ -divise sur  $C$ . Il y a donc une suite  $(\bar{b}^i c^i : i < \omega)$  indiscernable sur  $C$  avec  $\bar{b}^0 c^0 = \bar{b}c$  et telle que  $\{\psi(\bar{x}, \bar{b}^i, c^i) : i < \omega\}$  est  $k$ -inconsistant. Mais cela implique

$$D(p, \psi, k) \leq D(\text{tp}(\bar{a}/C) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b}, c), \psi, k) \leq D(\bar{a}/C, \psi, k) + 1,$$

une contradiction. Donc  $\bar{a} \downarrow_C B$ .

Il en découle que donné  $A$  et  $B$  on pourra choisir pour chaque partie finie  $\bar{a} \in A$ , toute formule  $\varphi$  et  $k < \omega$  une partie finie  $B(\bar{a}, \varphi, k) \subseteq B$  telle que  $D(\bar{a}/B, \varphi, k) = D(\bar{a}/B(\bar{a}, \varphi, k), \varphi, k)$ . On pose  $C = \bigcup_{\bar{a}, \varphi, k} B(\bar{a}, \varphi, k) \subseteq B$  avec  $|C| \leq |\mathcal{L}| + |A| + \aleph_0$ ; puisque les rangs témoignent de la deviation, on a bien  $\bar{a} \downarrow_C B$  pour tout  $\bar{a} \subseteq A$  fini, donc  $A \downarrow_C B$  par caractère fini, la non-deviation satisfait au caractère local, et la théorie est simple.

Réciproquement, supposons que  $\bar{a} \downarrow_C B$ . On montrera par récurrence sur  $n < \omega$  que  $D(\bar{a}/C, \varphi, k) \geq n$  implique  $D(\bar{a}/C, \varphi, k) \geq n$ . C'est évident

pour  $n = 0$  ; soit donc  $D(\bar{a}/C, \varphi, k) \geq n + 1$ . Alors il y a une suite  $(\bar{b}_i : i < \omega)$  indiscernable sur  $C$  telle que

$$D(\text{tp}(\bar{a}/C) \wedge \varphi(\bar{x}, b_i), \varphi, k) \geq n$$

et  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < \omega\}$  est  $k$ -inconsistent. Soit  $q \in S(C\bar{b}_0)$  une complétion de  $\text{tp}(\bar{a}/C) \wedge \varphi(\bar{x}, b_0)$  avec

$$D(q, \varphi, k) = D(\text{tp}(\bar{a}/C) \wedge \varphi(\bar{x}, b_i), \varphi, k) \geq n ;$$

soit  $\bar{a}' \models q$  et  $B'\bar{a}' \equiv_C B\bar{a}$  avec  $B' \downarrow_{C\bar{a}'} \bar{b}_0$ . Donc  $B' \downarrow_C \bar{a}'\bar{b}_0$  par transitivité (on sait déjà que la théorie est simple, et l'indépendance symétrique). Par la proposition 8.9 il y a  $B''$  avec  $B''\bar{b}_i \equiv_C B\bar{b}_0$  ; soit  $\bar{a}''$  tel que  $B''\bar{a}'' \equiv_{C\bar{b}_0} B'\bar{a}'$ . Or,  $\bar{a}'' \downarrow_{C\bar{b}_0} B''$  et par hypothèse de récurrence

$$D(\bar{a}''/B''C\bar{b}_0, \varphi, k) = D(\bar{a}''/C\bar{b}_0, \varphi, k) = D(q, \varphi, k) \geq n.$$

Puisque  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < \omega\}$  est  $k$ -inconsistent et  $\bar{b}_i \equiv_{B''C} \bar{b}_0$ , on a

$$D(\bar{a}/BC, \varphi, k) = D(\bar{a}''/B''C, \varphi, k) \geq D(\bar{a}''/B''C\bar{b}_0, \varphi, k) + 1 \geq n + 1. \blacksquare$$

**Corollaire 8.18** *Une théorie stable est simple.*

DÉMONSTRATION: Si  $D(\pi, \varphi, k) = \infty$ , alors par compacité il existe une suite  $(\bar{b}_i : i < (2^{\aleph_0})^+)$  indiscernable sur les paramètres de  $\pi$  telle que  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i < (2^{\aleph_0})^+\}$  est  $k$ -inconsistent et  $D(\pi \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_0), \varphi, k) = \infty$ . D'après l'exercice 8.15 ceci est témoigné par un certain arbre de hauteur  $\omega$  dont les  $2^{\aleph_0}$  branches sont toutes consistantes avec  $\pi \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{b}_0)$ . Mais une réalisation d'une branche ne peut satisfaire qu'au plus  $k - 2$  parmi les formules  $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i > 0\}$ . Il y a donc un  $i < (2^{\aleph_0})^+$  telle que toutes ces réalisations des branches satisfont  $\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i)$ . Donc  $D(\pi \wedge \neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i), \varphi, k) = \infty$ , et par indiscernabilité  $D(\pi \wedge \neg\varphi(\bar{x}, \bar{b}_0), \varphi, k) = \infty$  aussi.

On peut donc construire récursivement un arbre de hauteur  $\omega$  avec  $\pi$  à la racine et des formules  $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$  et  $\neg\varphi(\bar{x}, \bar{b})$  aux deux successeurs d'un sommet ; par compacité on peut faire la même chose avec un arbre de hauteur  $\lambda$  pour n'importe quel cardinal  $\lambda$ , ce qui nous donne  $2^\lambda$  types sur les  $\lambda$  paramètres de l'arbre. ■

# Chapitre 9

## Le rang de Lascar

**Définition 9.1** Soit  $T$  une théorie simple, et  $\mathfrak{M}$  un modèle monstre. Le *rang de Lascar*  $SU$  est la fonction minimale de la collections des types avec paramètres dans  $\mathfrak{M}$  dans la collection des ordinaux augmentée de  $\infty$  (qui est plus grand que tout ordinal) telle que

$$SU(p) \geq \alpha + 1 \text{ s'il y a une extension deviante } q \text{ de } p \text{ avec } SU(q) \geq \alpha.$$

On note  $SU(\bar{a}/B)$  pour  $SU(\text{tp}(\bar{a}/B))$ .

**Remarque 9.2**  $SU$  est invariant par automorphisme,  $SU(p) \geq SU(q)$  si  $q \vdash p$ , et  $SU(p) = 0$  si et seulement si  $p$  est algébrique. De plus, si  $Q \supseteq p$  et  $SU(p) = SU(Q) < \infty$ , alors  $Q$  est une extension non-deviante de  $p$ . Enfin, si  $SU(p) < \infty$  et  $\alpha \leq SU(p)$ , alors  $p$  a une extension  $q$  avec  $SU(q) = \alpha$  par minimalité du rang.

**Définition 9.3**  $T$  est *supersimple* si  $SU(p) < \infty$  pour tout type  $p$  (en un nombre fini de variables).  $T$  est *superstable* si  $T$  est stable et supersimple.

**Exercice 9.4**  $T$  est supersimple si et seulement si pour tout  $\bar{a}$  fini et tout  $B$  il y a  $C \subseteq B$  fini avec  $\bar{a} \downarrow_C B$ .

**Lemme 9.5** Soit  $T$  simple, et  $p_0 \in S(B)$  non-algébrique. Alors  $p_0$  a une extension  $p$  avec  $SU(p) = 1$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $(\varphi_i, k_i : i < \kappa)$  une énumération de toutes les paires d'une formule et d'un entier naturel. On choisit récursivement des extension

non-algébriques  $p_{i+1}$  de  $p_i$  telles que  $D(p_{i+1}, \varphi_i, k_i)$  est minimal possible, et  $p_\lambda = \bigcup_{i < \lambda} p_i$  pour un ordinal limite  $\lambda \leq \kappa$ . Par compacité tous les  $p_i$  sont non-algébriques. Soit  $p = p_\kappa$ , alors toute extension devianante de  $p$  doit faire chuter un des rangs  $D(., \varphi, k)$ , et sera donc algébrique par minimalité. Ainsi  $SU(p) = 1$ . ■

**Proposition 9.6** *Si  $\bar{a} \downarrow_C B$  alors  $SU(\bar{a}/C) = SU(\bar{a}/BC)$ .*

DÉMONSTRATION: Par induction sur  $\alpha$  on montre que  $SU(\bar{a}/C) \geq \alpha$  implique  $SU(\bar{a}/BC) \geq \alpha$ , l'autre direction étant évidente. Pour  $\alpha = 0$  ou limite il n'y a rien à démontrer. Si  $SU(\bar{a}/C) \geq \alpha + 1$ , il y a  $C' \supset C$  avec  $\bar{a} \not\downarrow_C C'$  et  $SU(\bar{a}/C') \geq \alpha$ ; on peut choisir  $C' \downarrow_{C\bar{a}} B$ . Puisque  $B \downarrow_C \bar{a}$  la transitivité donne  $B \downarrow_C C'\bar{a}$  et donc  $B \downarrow_{C'} \bar{a}$ ; par hypothèse de récurrence  $SU(\bar{a}/BC') \geq \alpha$ . Si  $\bar{a} \downarrow_{BC} C'$  par transitivité avec  $\bar{a} \downarrow_C B$  on aurait  $\bar{a} \downarrow_C BC'$ , une contradiction. Donc  $\bar{a} \not\downarrow_{BC} C'$ , et

$$SU(\bar{a}/BC) \geq SU(\bar{a}/BC') + 1 \geq \alpha + 1. \quad \blacksquare$$

**Théorème 9.7** INÉGALITÉS DE LASCAR

1.  $SU(\bar{a}/\bar{b}A) + SU(\bar{b}/A) \leq SU(\bar{a}\bar{b}/A) \leq SU(\bar{a}/\bar{b}A) \oplus SU(\bar{b}/A)$ .
2. Si  $SU(\bar{a}/A\bar{b}) < \infty$  et  $SU(\bar{a}/A) \geq SU(\bar{a}/A\bar{b}) \oplus \alpha$ , alors  $SU(\bar{b}/A) \geq SU(\bar{b}/A\bar{a}) + \alpha$ .
3. Si  $SU(\bar{a}/A\bar{b}) < \infty$  et  $SU(\bar{a}/A) \geq SU(\bar{a}/A\bar{b}) + \omega^\alpha n$ , alors  $SU(\bar{b}/A) \geq SU(\bar{b}/A\bar{a}) + \omega^\alpha n$ .
4. Si  $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$  alors  $SU(\bar{a}\bar{b}/A) = SU(\bar{a}/A) \oplus SU(\bar{b}/A)$ .

DÉMONSTRATION:

1. On montre par récurrence sur  $\alpha$  que  $SU(\bar{b}/A) \geq \alpha$  implique  $SU(\bar{a}\bar{b}/A) \geq SU(\bar{a}/\bar{b}A) + \alpha$ . Pour  $\alpha = 0$  ou limite c'est évident. Soit donc  $SU(\bar{b}/A) \geq \alpha + 1$ . On prend  $B \supseteq A$  avec  $\bar{b} \not\downarrow_A B$  et  $SU(\bar{b}/B) \geq \alpha$ . On peut choisir  $B \downarrow_{A\bar{b}} \bar{a}$ , d'où  $SU(\bar{a}/\bar{b}A) = SU(\bar{a}/\bar{b}B)$ . Par hypothèse de récurrence  $SU(\bar{a}\bar{b}/B) \geq SU(\bar{a}/\bar{b}B) + \alpha = SU(\bar{a}/\bar{b}A) + \alpha$ . Puisque  $B \not\downarrow_A \bar{a}\bar{b}$ , on a  $SU(\bar{a}\bar{b}/A) \geq SU(\bar{a}\bar{b}/B) + 1 \geq SU(\bar{a}/\bar{b}A) + \alpha + 1$ .

Pour la deuxième inégalité on montre par récurrence sur  $\alpha$  que  $SU(\bar{a}\bar{b}/A) \geq \alpha$  implique  $SU(\bar{a}/\bar{b}A) \oplus SU(\bar{b}/A) \geq \alpha$ . Encore c'est évident pour  $\alpha = 0$

ou limite. Supposons  $SU(\bar{a}\bar{b}/A) \geq \alpha + 1$ , et soit  $B \supseteq A$  avec  $\bar{a}\bar{b} \not\downarrow_A B$  et  $SU(\bar{a}\bar{b}/B) \geq \alpha$ . Par hypothèse de récurrence  $SU(\bar{a}/\bar{b}B) \oplus SU(\bar{b}/B) \geq \alpha$ . Si  $\bar{b} \not\downarrow_A B$ , alors  $SU(\bar{b}/A) \geq SU(\bar{b}/B) + 1$  et  $SU(\bar{a}/\bar{b}A) \oplus SU(\bar{b}/A) \geq \alpha + 1$ . Sinon,  $\bar{b} \downarrow_A B$  et  $\bar{a} \not\downarrow_{\bar{b}A} B$ , d'où  $SU(\bar{a}/\bar{b}A) \geq SU(\bar{a}/\bar{b}B) + 1$  et  $SU(\bar{a}/\bar{b}A) \oplus SU(\bar{b}/A) \geq \alpha + 1$ .

2. Par récurrence sur  $\beta = SU(\bar{a}/A\bar{b}) \oplus \alpha$ , les cas  $\beta = 0$  et  $\beta$  limite étant trivial, ainsi que le cas  $\alpha = 0$ . Supposons  $SU(\bar{a}/A) \geq \beta + 1 = SU(\bar{a}/A\bar{b}) \oplus \alpha$ , et soit  $B \supseteq A$  avec  $\bar{a} \not\downarrow_A B$  et  $SU(\bar{a}/B) \geq \beta$ . On peut choisir  $B \downarrow_{A\bar{a}} \bar{b}$ , d'où  $SU(\bar{b}/B\bar{a}) = SU(\bar{b}/A\bar{a})$ . Soit  $\alpha' < \alpha$  et donc  $SU(\bar{a}/B) \geq SU(\bar{a}/B\bar{b}) \oplus \alpha'$ . Si  $\bar{b} \not\downarrow_A B$ , par hypothèse de récurrence  $SU(\bar{b}/A) \geq SU(\bar{b}/B) + 1 \geq SU(\bar{b}/B\bar{a}) + \alpha' + 1 = SU(\bar{b}/A\bar{a}) + \alpha' + 1$ , d'où  $SU(\bar{b}/A) \geq SU(\bar{b}/A\bar{a}) + \alpha$ .

Sinon  $\bar{a} \not\downarrow_{\bar{b}A} B$ , donc  $SU(\bar{a}/A\bar{b}) \geq SU(\bar{a}/B\bar{b}) + 1$  et

$$SU(\bar{a}/B) \geq SU(\bar{a}/A\bar{b}) \oplus \alpha' \geq SU(\bar{a}/B\bar{b}) \oplus \alpha' + 1,$$

d'où encore par hypothèse de récurrence

$$SU(\bar{b}/A) = SU(\bar{b}/B) \geq SU(\bar{b}/B\bar{a}) + \alpha' + 1 = SU(\bar{b}/A\bar{a}) + \alpha' + 1,$$

d'où  $SU(\bar{b}/A) \geq SU(\bar{b}/A\bar{a}) + \alpha$ .

3. Pour  $\alpha = 0$  la somme ordinaire et la somme symétrique coïncident. Pour  $\alpha > 0$  et  $\beta < \omega^\alpha n$  on a  $SU(\bar{a}/A\bar{b}) + \omega^\alpha n > SU(\bar{a}/A\bar{b}) \oplus \beta$ . Le résultat découle de la partie 2. par continuité.
4. Si  $SU(\bar{a}/A) \geq \alpha + 1$  il y a  $B \supseteq A$  avec  $\bar{a} \not\downarrow_A B$  et  $SU(\bar{a}/B) \geq \alpha$ . On peut choisir  $B \downarrow_{A\bar{a}} \bar{b}$ , d'où  $B\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ . Alors  $SU(\bar{b}/B) = SU(\bar{b}/A)$ ,  $\bar{a} \downarrow_B \bar{b}$ , et  $B \not\downarrow_A \bar{a}\bar{b}$ . Par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} SU(\bar{a}\bar{b}/A) &\geq SU(\bar{a}\bar{b}/B) + 1 \geq (SU(\bar{a}/B) \oplus SU(\bar{b}/B)) + 1 \\ &\geq (\alpha + 1) \oplus SU(\bar{b}/A). \end{aligned}$$

Les cas de rang zéro ou limite étant triviaux, le résultat découle par récurrence et symétrie. ■

**Exercice 9.8** Si  $SU(\bar{a}/C) = \omega^\alpha$  et  $SU(\bar{b}/C) < \omega^\alpha$ , alors  $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}$ .

**Exercice 9.9** Une théorie (dénombrable)  $\omega$ -stable est superstabile.

# Chapitre 10

## Corps différentiellement clos et séparablement clos

**Définition 10.1** Soit  $K$  un corps. Une *dérivation* sur  $K$  est un endomorphisme additif  $\delta : K \rightarrow K$  tel que  $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ . Un *corps différentiel* est un corps avec une dérivation.

On voit facilement que  $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$ . Si  $K$  est un corps différentiel de caractéristique  $p > 0$ , on a donc  $\delta(x^p) = 0$  pour tout  $x \in K$ , et pour connaître la dérivation, il suffit de la connaître pour une base de  $K$  en tant que  $K^p$ -espace vectoriel.

**Exemple 10.2** Pour un corps  $K$  quelconque, on peut toujours mettre la dérivation triviale  $\delta = 0$ . Un exemple non-trivial est un corps de fonctions  $K(x)$  où on met  $\delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

**Définition 10.3** Un *polynôme différentiel* en  $X$  est un polynôme en  $X, \delta X, \delta^2 X, \dots$ . L'ensemble des polynômes différentiels sur  $K$  est noté  $K\{X\}$ . L'*ordre*  $ord(f)$  d'un polynôme différentiel  $f \in K\{X\}$  est le plus grand entier  $n$  tel que  $\delta^n X$  apparaît dans  $f$  avec un coefficient non-nul ; on pose  $ord(a) = -1$  pour  $a \in K$ . Un *idéal différentiel* est un idéal  $I$  tel que  $\delta f \in I$  pour tout  $f \in I$ .

**Définition 10.4** Un corps  $K$  est *différentiellement clos* si pour tout  $f, g \in K\{X\}$  avec  $ord(f) > ord(g)$  il y a  $a \in K$  avec  $f(a) = 0 \neq g(a)$ .

Puisqu'on peut prendre comme  $f$  un vrai polynôme sur  $K$  et  $g(X) \equiv 1$ , un corps différentiellement clos est algébriquement clos.

**Lemme 10.5** *Tout corps différentiel  $K$  se plonge dans un corps différentiellement clos.*

DÉMONSTRATION: Soient  $f, g \in K\{X\}$  avec  $n = \text{ord}(f) > \text{ord}(g)$ . On considère  $f$  comme polynôme en variables  $X, \delta X, \dots, \delta^n X$ , et on prend un facteur irréductible  $f_0$  de  $f$  avec  $\text{ord}(f_0) = n$ . Soient  $a_0, \dots, a_{n-1}$  des éléments algébriquement indépendants sur  $K$ , et  $a_n$  une solution de l'équation algébrique  $f_0(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, X) = 0$ . On pose  $\delta^i(a_0) = a_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , et on vérifie que cela détermine une structure de corps différentiel sur  $K\{a_0\} = K(a_0, \dots, a_n)$  où  $a_0$  satisfait  $f(a_0) = 0 \neq g(a_0)$ .

En rajoutant récursivement des solutions pour toutes les paires  $f, g$  avec  $\text{ord}(f) > \text{ord}(g)$ , avec des réunions aux limites, on obtient une extension différentiellement close. ■

**Exercice 10.6** La théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro est complète et élimine les quanteurs.

**Exercice 10.7** La cloture définissable d'un sous-ensemble  $A$  d'un corps différentiellement clos est le corps différentiel  $\mathbb{Q}\{A\}$  engendré par  $A$ .

**Définition 10.8** Soit  $K$  un corps différentiel. Le *corps de constantes* est le sous-corps  $C(K) = \{a \in K : \delta(a) = 0\}$ .

**Exercice 10.9** Si  $K$  est différentiellement clos, alors  $C(K)$  est algébriquement clos.

**Définition 10.10** Un idéal  $I$  est *radical* si  $f^n \in I$  implique  $f \in I$ .

**Fait 10.11** *Soit  $I$  un idéal différentiel radical. Alors il y a  $I_0 \subseteq I$  fini tel que  $I = \sqrt{I_0, \delta(I_0), \delta^2(I_0), \dots}$ .*

**Théorème 10.12** *La théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro est  $\omega$ -stable.*

DÉMONSTRATION: Soit  $K$  un corps différentiellement clos dénombrable,  $p \in S_1(K)$ , et  $a$  une réalisation de  $p$  dans une extension élémentaire. Par élimination des quanteurs  $p$  est déterminé par l'ensemble des polynômes différentiels sur  $K$  qui s'annulent sur  $a$ ; on voit facilement que c'est un idéal différentiel radical. Il est donc engendré par un ensemble fini de polynômes. Il n'y a qu'un choix dénombrable pour cet ensemble, et  $|S_1(K)| = \aleph_0$ . ■

**Définition 10.13** Soit  $K$  un corps. Un polynôme  $f \in K[X]$  est séparable si toutes ses racines sont différentes. Un point  $a$  d'une extension algébrique de  $K$  est *séparable* si son polynôme minimal l'est, et une extension  $L/K$  est *séparable* si tous ses points algébriques le sont. Un corps est *séparablement clos* s'il n'a pas d'extension séparable.

**Remarque 10.14** En caractéristique zéro tout polynôme irréductible est séparable, puisqu'il n'a pas de facteur commun avec son polynôme dérivé. Ainsi un corps séparablement clos de caractéristique zéro est algébriquement clos. En caractéristique  $p > 0$  le polynôme dérivé peut être trivial ; c'est le cas pour le polynôme  $x^p = a$  avec  $a \in K \setminus K^p$ , par exemple.

**Remarque 10.15** Si  $K$  est un corps, soit  $K^{sep}$  l'ensemble de tous les points séparables sur  $K$  d'une clôture algébrique  $K^{alg}$ . Alors  $K^{sep}$  est une extension algébrique séparablement clos de  $K$ , sa *clôture séparable*, et  $K^{alg}$  est obtenu de  $K^{sep}$  en prenant des racines  $p$ -mes itérées.  $K^{alg}/K^{sep}$  est donc une extension purement inséparable.

**Définition 10.16** Soit  $K$  un corps séparablement clos. L'invariant de *Eršov*  $E(K)$  est le degré de l'extension  $[K : K^p]$ . Il prend ses valeurs dans  $\omega \cup \{\infty\}$ .

**Remarque 10.17**  $E(K) = 0$  si et seulement si  $K$  est algébriquement clos.

**Fait 10.18** *La théorie des corps séparablement clos de caractéristique  $p > 0$  et d'invariant de Eršov  $\nu > 0$  est complète et stable, non superstable. Si  $K$  en est un modèle,  $SU(K) = \infty$  et  $SU(\bigcap_{m \in \omega} K^{p^m}) = 1$ .*