

# Surfaces de Riemann

Jean-Yves Welschinger\*

Mai 2016

Un premier objectif que l'on se fixe dans ce cours sur les surfaces de Riemann est de démontrer la formule de Riemann-Hurwitz et la formule du genre des courbes planes, due à Plücker. Un deuxième objectif est de parvenir à la dualité de Serre et au théorème de Riemann-Roch. On finit par évoquer le théorème d'Abel-Jacobi. Ce cours se concentre donc principalement sur les surfaces de Riemann compactes et on pourra par exemple consulter les références [MIR], [REY], [BRI] et [DON] pour en connaître davantage. Les énoncés des travaux dirigés, assurés par Bruno Sévenec, sont fournis en annexe.

Les notes de cours que voici ont été rédigées par Matthieu Dussaule, il s'agit d'un cours de niveau Master 1 dispensé à l'École normale supérieure Lyon aux printemps 2014, 2015 et 2016.

---

\* Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS, Institut Camille Jordan.

## Table des matières

|         |  |    |
|---------|--|----|
| I       | Surfaces de Riemann                          | 3  |
| 1.1     | Définitions                                  | 3  |
| 1.2     | Fibré tangent                                | 5  |
| 1.3     | Applications holomorphes                     | 6  |
| 1.4     | Formule de Riemann-Hurwitz                   | 8  |
| 1.4.1   | Revêtements ramifiés                         | 8  |
| 1.4.2   | 1-formes méromorphes                         | 9  |
| 1.4.3   | Digression : La caractéristique d'Euler      | 11 |
| 1.4.4   | Formule de Riemann-Hurwitz                   | 15 |
| 1.5     | Les courbes projectives lisses               | 16 |
| 1.5.1   | Les espaces projectifs complexes             | 16 |
| 1.5.2   | Les courbes planes                           | 17 |
| II      | Fibrés en droites holomorphes                | 21 |
| 2.1     | Fibrés vectoriels, sections                  | 21 |
| 2.1.1   | Fibrés vectoriels réels et complexes         | 21 |
| 2.1.2   | Fibrés vectoriels holomorphes                | 22 |
| 2.1.3   | Faisceau des sections                        | 23 |
| 2.2     | Cohomologie de Čech                          | 25 |
| 2.2.1   | Cas d'un fibré holomorphe                    | 25 |
| 2.2.2   | Le cas du faisceau constant                  | 31 |
| 2.2.2.1 | Définition                                   | 31 |
| 2.2.2.2 | La cohomologie simpliciale                   | 31 |
| 2.3     | Groupe de Picard                             | 33 |
| 2.3.1   | Opérations sur les fibrés vectoriels         | 33 |
| 2.3.2   | Groupe de Picard                             | 34 |
| 2.4     | Diviseurs                                    | 35 |
| 2.4.1   | Degré et diviseurs de sections               | 35 |
| 2.4.2   | Fibré associé à un diviseur                  | 37 |
| 2.5     | Dualité de Serre et théorème de Riemann-Roch | 39 |
| 2.5.1   | L'opérateur de Cauchy-Riemann                | 39 |
| 2.5.2   | Dualité de Serre et théorème de Riemann-Roch | 40 |
| 2.5.3   | Théorème d'Abel-Jacobi                       | 43 |
|         | Références                                   | 46 |
|         | Travaux dirigés                              | 47 |

# I Surfaces de Riemann

## 1.1 Définitions

**Définition I.1.** On appelle variété différentielle de dimension  $n$  tout espace topologique séparé  $\Sigma$  recouvert par un nombre au plus dénombrable de cartes.

Une carte est la donnée d'un ouvert  $U$  de  $\Sigma$ , d'un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  et d'un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  tels que si deux cartes  $U_1$  et  $U_2$  se rencontrent, l'application de changement de cartes  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

Lorsque  $n = 2$ ,  $\Sigma$  est aussi appelée surface différentielle. Lorsque  $n = 1$ ,  $\Sigma$  est aussi appelée courbe lisse.

**Exemple I.2.** Les ensembles suivants sont des variétés différentielles (toutes de dimension deux).

- 1) Le disque ouvert  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ .
- 2) La sphère  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- 3) Le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

**Contre-Exemple I.3.** En revanche les ensembles suivants ne sont pas des variétés différentielles

- 1) La réunion de deux copies de  $\mathbb{R}^2$  où l'on identifie les points de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . En effet toutes les propriétés d'une variété différentielle sont vérifiées exceptée celle d'espace séparé !
- 2) Le produit de la droite longue par elle même n'est pas une surface différentielle parce qu'elle n'est pas recouverte par un nombre au plus dénombrable de cartes.

**Remarque I.4.** On peut aussi définir des variétés topologiques  $C^0$  en imposant seulement que les changements de cartes soient des homéomorphismes. Dans ce cas la notion de dimension a encore un sens grâce au théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

**Définition I.5.** La réunion des cartes d'une variété différentielle est appelée un atlas et deux atlas sont dits compatibles si et seulement si leur réunion reste un atlas.

**Définition I.6.** Une variété complexe de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $\Sigma$  recouvert par un nombre au plus dénombrable de cartes.

Une carte est la donnée d'un ouvert  $U$  de  $\Sigma$ , d'un ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}^n$  et d'un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  tels que si deux cartes  $U_1$  et  $U_2$  se rencontrent, l'application de changement de cartes  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  soit un biholomorphisme.

Lorsque  $n = 1$ ,  $\Sigma$  est aussi appelée courbe complexe ou surface de Riemann.

Rappelons qu'une application entre ouverts de  $\mathbb{C}^n$  est holomorphe lorsque sa différentielle est  $\mathbb{C}$ -linéaire et qu'elle est biholomorphe lorsqu'elle possède de plus un inverse holomorphe.

**Exemple I.7.** Voici quelques exemples de surfaces de Riemann

- 1)  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C} \setminus F$  où  $F$  est un fermé de  $\mathbb{C}$  sont des courbes complexes.

- 2) Un réseau de  $\mathbb{C}$  est par définition un sous-groupe discret cocompact de  $\mathbb{C}$ , c-à-d à quotient compact. Si  $\Lambda$  est un réseau,  $\mathbb{C}/\Lambda$  est une courbe complexe, appelée courbe elliptique. Elle est homéomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$ .
- 3) La sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est obtenue en recollant deux copies de  $\mathbb{C}$ ,  $V_1$  et  $V_2 \simeq \mathbb{C}$  à l'aide de l'application de recollement

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* = V_1 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^* = V_2 \setminus \{0\} \\ z &\mapsto 1/z \end{aligned}$$

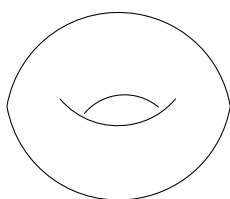
C'est une surface de Riemann homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ . (si l'on choisit comme cartes les projections stéréographiques de cette sphère centrées en deux pôles, alors  $z \mapsto 1/z$  devient le changement de cartes, voir l'exercice 4 du TD1).

- 4) On peut remplacer  $\mathbb{C}$  dans l'exemple 2 par le disque unité ouvert  $\Delta$  et  $\Lambda$  par un sous-groupe du groupe des biholomorphismes de  $\Delta$  qui agit de façon discrète sans point fixe et avec quotient compact. Il existe de tels sous-groupes. Alors de la même manière, le quotient  $\Delta/\Lambda$  hérite d'une structure de courbe complexe. Un atlas est donné par des inverses locaux de la projection  $\Delta \rightarrow \Delta/\Lambda$ .

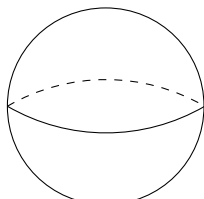
**Proposition I.8.** Toute courbe complexe est en particulier une surface différentielle.

*Démonstration.* En effet,  $\mathbb{C}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^2$  et un biholomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{C}$  est en particulier un difféomorphisme entre ces ouverts.  $\square$

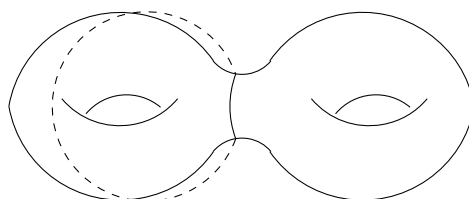
Les exemples 2, 3 et 4 précédents sont des surfaces de Riemann compactes. Ce sont donc en particulier des surfaces différentielles compactes. Il s'agit respectivement du tore  $\mathbb{T}^2$ , de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , et de surfaces orientables de genre plus grand que deux :



Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4

**Remarque I.9.** Si  $f : V_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow V_2 \subset \mathbb{C}$  est un biholomorphisme, alors en tout point  $z$  de  $\mathbb{C}$ , le jacobien  $Jac_z f$  vaut  $|f'(z)|^2$  (exercice). Donc en particulier  $Jac_z f > 0$ . Par suite, les applications de changement de cartes de la surface différentiable associée sont des difféomorphismes entre ouverts de  $\mathbb{R}^2$  qui préservent l'orientation de  $\mathbb{R}^2$ . Les surfaces de Riemann sont donc orientables et même canoniquement orientées !

De manière générale, un principe fondamental est que toute propriété de  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ici) qui est préservée par les changements de cartes d'un atlas passent en des propriétés de la variété. Une autre manifestation de ce principe est la suivante :

**Définition I.10.** Une application  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  entre variétés différentielles est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  (respectivement différentiable) si et seulement si pour toute carte  $\varphi$  de  $\Sigma$  et  $\psi$  de  $\Sigma'$ , la composée  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  (respectivement différentiable).

Cette définition suit le principe général énoncé ci-dessus dans la mesure où un difféomorphisme préserve la régularité d'une fonction.

**Remarque I.11.** La Proposition I.8 possède en fait la réciproque suivante et je remercie Jean-Claude Sikorav de m'avoir indiqué les références de ce Théorème I.12.

**Théorème I.12** (Gauss, Korm, Lichtenstein, Ahlfors, Bers). Toute surface différentielle orientable possède une structure de surface de Riemann compatible, c'est-à-dire peut être munie d'un atlas complexe compatible.

## 1.2 Fibré tangent

**Définition I.13.** Soit  $\Sigma$  une variété différentielle (respectivement complexe) de dimension  $n$ , munie d'un atlas  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ . On appelle fibré tangent, et on note  $T\Sigma$  la variété différentielle (respectivement complexe) obtenue par recollement des ouverts  $V_i \times \mathbb{K}^n$  par les applications de recollement

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^n \\ (x, v) &\mapsto (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), d_x(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v)) \end{aligned}$$

Les projections sur le premier facteur  $(x, v) \in V_i \times \mathbb{K}^n \mapsto x \in V_i$  induisent une projection  $\pi : (x, v) \in T\Sigma \mapsto x \in \Sigma$  dont les fibres sont des espaces vectoriels réels (respectivement complexes) (toujours selon le même principe général, car les projections et la structure d'espace vectoriel sont préservées par les changements de cartes induits par les applications de recollement).

**Définition I.14.** Pour tout point  $x \in \Sigma$ , on note  $T_x\Sigma$  l'espace vectoriel  $\pi^{-1}(x) \subset T\Sigma$ , que l'on appelle espace tangent à  $\Sigma$  au point  $x$ . Les éléments de  $T_x\Sigma$  sont les vecteurs tangents à  $\Sigma$  au point  $x$ .

Les vecteurs tangents à  $\Sigma$  au point  $x$  sont en fait les vecteurs dérivés en  $x$  des courbes tracées sur  $\Sigma$  et passant par  $x$ . En effet, soit  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \Sigma$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\gamma(0) = x$  (cette notion a bien un sens d'après la Définition I.10). Soit alors  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  une carte contenant  $x$ . Quitte à restreindre  $\epsilon$ , l'image de  $\gamma$  est incluse dans  $U_1$ . On note alors  $v_1 := (\varphi_1 \circ \gamma)'(0)$ . C'est un vecteur de  $\mathbb{K}^n$ . Si  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  est une autre carte contenant  $x$ , et si on définit de même  $v_2 := (\varphi_2 \circ \gamma)'(0)$ , alors  $d_x(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(v_1) = v_2$ , de sorte que ces vecteurs sont identifiés par l'application de recollement  $\Phi_{1,2}$  de  $T\Sigma$  et définissent un élément  $v$  de  $T_x\Sigma$ . Ce vecteur est par définition le vecteur dérivé de  $\gamma$  en 0 et noté  $\gamma'(0) := v$ .

**Exemple I.15.** Voici quelques exemples de fibrés tangents.

- 1) Si  $\Sigma = \mathbb{S}^2$ , alors  $T\Sigma$  peut être vu comme  $\{(x, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3, \langle x, v \rangle = 0\}$ . Remarquons que ce fibré est non trivial, il n'est pas isomorphe comme fibré, ni même difféomorphe, à  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

2) Par contre, si  $\Sigma = \mathbb{C}/\Lambda$  est une courbe elliptique, alors  $T\Sigma = \Sigma \times \mathbb{C}$ . En fait  $T\mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  canoniquement, et  $T\Sigma = (\mathbb{C} \times \mathbb{C})/\Lambda$ , où  $\Lambda$  agit par

$$\begin{aligned}\Lambda \times T\mathbb{C} &\rightarrow T\mathbb{C} \\ \lambda, (x, v) &\mapsto (x + \lambda, v)\end{aligned}$$

de sorte que  $\Lambda$  n'agit pas sur le second facteur.

**Définition I.16.** Soit  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  une application différentiable entre variétés différentielles (respectivement complexes). On appelle différentielle de  $f$ , et on note  $df$  l'application induite

$$\begin{aligned}df : T\Sigma &\rightarrow T\Sigma' \\ (x, v) &\mapsto (x, d_x f(v))\end{aligned}$$

telle que si  $x = \gamma(0)$  et  $v = \gamma'(0)$ , avec les notations précédentes, alors  $d_x f(v) := (f \circ \gamma)'(0)$ .

Si  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  (respectivement  $\psi_1 : U'_1 \rightarrow V'_1$ ) est une carte de  $\Sigma$  (respectivement de  $\Sigma'$ ), alors l'application  $df$  se lit dans les cartes associées  $\Phi_1 : \Pi^{-1}(U_1) \subset T\Sigma \rightarrow V_1 \times \mathbb{K}^n$  (respectivement  $\Psi_1 : \Pi^{-1}(U'_1) \subset T\Sigma' \rightarrow V'_1 \times \mathbb{K}^n$ ) comme l'application

$$\begin{aligned}V_1 \times \mathbb{K}^n &\rightarrow V'_1 \times \mathbb{K}^n \\ (z_1, v_1) &\mapsto (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z_1), d_{z_1}(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(v_1))\end{aligned}$$

Dans les cartes  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  (respectivement  $\psi_2 : U'_2 \rightarrow V'_2$ ), elle se lit

$$\begin{aligned}V_2 \times \mathbb{K}^n &\rightarrow V'_2 \times \mathbb{K}^n \\ (z_2, v_2) &\mapsto (\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(z_2), d_{z_2}(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(v_2)).\end{aligned}$$

Ces applications dans les cartes se recollent par les applications de recollement  $\Phi_{1,2}$  et  $\Psi_{1,2}$  de  $T\Sigma$  et  $T\Sigma'$  pour définir l'application  $df$ .

**Remarque I.17.** 1) Attention, si la notion d'application de classe  $\mathcal{C}^2$  entre variétés a bien un sens, voir la Définition I.10, et qu'une telle application possède une différentielle bien définie par la Définition I.16, elle ne possède pas en général de différentielle seconde intrinsèque canoniquement définie.

2) D'autre part, si une variété différentielle  $\Sigma$  est orientable, alors l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^n$  induit une orientation sur chaque espace tangent  $T_x \Sigma$  de  $\Sigma$ , orientation qui dépend continûment du point  $x$  de  $\Sigma$ . Réciproquement, s'il est possible de munir chaque espace tangent  $T_x \Sigma$  d'une orientation de sorte que cette orientation dépende continûment du point  $x$  de  $\Sigma$ , alors  $\Sigma$  est orientable.

### 1.3 Applications holomorphes

**Définition I.18.** Une application  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  entre surfaces de Riemann est dite holomorphe si et seulement si pour toutes cartes  $\varphi$  de  $\Sigma$  et  $\psi$  de  $\Sigma'$ , la fonction  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est holomorphe entre ouverts de  $\mathbb{C}$ .

En effet, la composition par un biholomorphisme préserve le caractère holomorphe d'une fonction. La Définition I.18 provient donc encore du principe fondamental : les notions préservées par les changements de cartes passent en des notions sur la variété.

**Rappels I.19.** Soit  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $f(0) = 0$ . Alors si  $f'(0) \neq 0$ ,  $f$  est un biholomorphisme local (théorème d'inversion locale holomorphe), et dans tous les cas, si  $f$  n'est pas constante, il existe un entier  $k$  non nul, et un complexe  $a$  non nul tels que  $f(z) = az^k + o(z^k)$ . De plus, il existe alors un biholomorphisme  $\varphi : V \subset U \rightarrow W \subset U$  tel que  $0 \in V$ ,  $0 \in W$ ,  $\varphi(0) = 0$  et  $f \circ \varphi(z) = z^k$ .

Aussi, toute fonction holomorphe est localement modélée sur une des applications  $z \in \mathbb{C} \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ ,  $k \geq 0$ . L'entier  $k$  est appelé l'ordre d'annulation de  $f$  en  $0$ , et noté  $\text{ord}_0(f)$ .

**Définition I.20.** Une fonction  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur une surface de Riemann est dite méromorphe si et seulement si pour toute carte  $\varphi$  de  $\Sigma$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  est méromorphe sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

**Rappels I.21.** Une fonction  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite méromorphe si et seulement si elle est définie et holomorphe en dehors d'un ensemble discret de points en lesquels elle a des pôles. Un point  $z_0$  de  $U$  est un pôle s'il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que  $(z - z_0)^k f$  se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de  $z_0$ . Le plus petit entier  $k$  vérifiant cette propriété est appelé l'ordre du pôle et noté  $-\text{ord}_{z_0}(f)$ . En fait, au voisinage  $V$  de  $z_0$ ,  $f$  possède un développement en série de Laurent

$$f : z \in V \mapsto f(z) = \sum_{j=\text{ord}_{z_0}(f)}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

où  $a_j \in \mathbb{C}$  et  $a_{\text{ord}_{z_0}(f)} \neq 0$ .

**Exemple I.22.**  $z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{C}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, est méromorphe.

**Proposition I.23.** Toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$  définit une application holomorphe  $\Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , fournissant une correspondance bijective entre les fonctions méromorphes sur  $\Sigma$  et les applications holomorphes de  $\Sigma$  vers la sphère de Riemann qui ne sont pas constante égales à  $\infty$ .

*Démonstration.* Par définition, lorsqu'une fonction méromorphe  $f$  n'est pas définie, elle prend la valeur  $\infty$ , de sorte qu'elle définit une application  $F : \Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Soit alors  $\varphi_0 : U_0 \rightarrow V_0 \simeq \mathbb{C}$  la carte de  $\hat{\mathbb{C}}$  contenant  $0$  et  $\varphi_\infty : U_\infty \rightarrow V_\infty \simeq \mathbb{C}$  la carte de  $\hat{\mathbb{C}}$  contenant  $\infty$ .

Alors  $\varphi_0 \circ F = f$  est holomorphe et  $\varphi_\infty \circ F = (\varphi_\infty \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ F) = 1/f$  est également holomorphe là où elle est définie. Cette application  $F$  est donc holomorphe au sens de la Définition I.18 et non constante égale à  $\infty$ . Réciproquement, si  $F : \Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est holomorphe non constante égale à  $\infty$ , alors  $f = \varphi_0 \circ F$  est méromorphe sur  $\Sigma$  et  $F$  est en correspondance avec  $f$ .  $\square$

**Proposition I.24.** Soit  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte, alors  $\sum_{z \in \Sigma} \text{ord}_z(f) = 0$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $f$  n'est pas constante. D'après la Proposition I.23,  $f$  induit une application  $F : \Sigma \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  holomorphe non constante.  $F^{-1}\{\infty\}$  est compact et discret, donc est fini. On note  $F^{-1}\{\infty\} = \{z_1, \dots, z_k\}$ . D'après la forme normale des applications holomorphes, il existe un voisinage  $V$  de  $\{\infty\}$  dans  $\hat{\mathbb{C}}$  et des voisinages  $U_1, \dots, U_k$  disjoints de  $z_1, \dots, z_k$  respectivement tels que  $F^{-1}(V) = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_k$ , et tels que  $F|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  soit conjugué à  $z \mapsto z^{-\text{ord}_{z_i}(f)}$ . En particulier, le nombre de points dans la préimage  $F^{-1}(p)$ , compté avec multiplicité, ne dépend pas du choix de  $p \in V$ . Le résultat vaut au voisinage de  $\infty$  mais de la même manière au voisinage de n'importe quel point  $z$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Ainsi le nombre d'éléments de la préimage de  $F$ , compté avec multiplicité, est une fonction localement constante. La connexité de  $\hat{\mathbb{C}}$  entraîne que c'est une fonction constante appelée le degré de  $F$  et noté  $d(F)$ . En appliquant ce résultat en  $0$  et  $\infty$ , on déduit le résultat.  $\square$

Cette démonstration repose en fait sur la notion de revêtement ramifiés que l'on va introduire au §1.4.1.

**Exercice I.25.** Montrer que toute fonction holomorphe  $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est de la forme  $F(z) = P/Q$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes homogènes à deux variables et de même degré. Ce degré commun coïncide avec le degré de  $F$  (voir l'exercice 1 du TD2).

## 1.4 Formule de Riemann-Hurwitz

### 1.4.1 Revêtements ramifiés

**Définition I.26.** Une application  $p : X \rightarrow Y$  entre variétés différentielles de même dimension est appelée revêtement si et seulement si tout point  $y$  de  $Y$  possède un voisinage  $V$  tel que  $p^{-1}(V)$  soit une réunion disjointe non vide d'ouverts  $\sqcup_{i \in I} U_i$ , et tel que  $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  soit un difféomorphisme.

On dit aussi que  $X$  est un revêtement de  $Y$  mais l'application  $p$  est importante.

**Exemple I.27.** Voici quelques exemples de revêtements :

- 1) L'application  $\exp : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \exp(i\theta) \in U^1$  est un revêtement du cercle.
- 2) La projection  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ , où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{C}$ , est un revêtement.
- 3) L'application  $z \in U^1 \mapsto z^k \in U^1$ , où  $k$  désigne un entier strictement positif, est un revêtement. Mais si on note  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ,  $z \in \Delta \mapsto z^k \in \Delta$  n'est pas un revêtement pour  $k \geq 2$ . Attention aux ensembles de départ et d'arrivée !

Le nombre de préimages d'un revêtement  $p$  est une fonction localement constante sur  $Y$  à valeur dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , appelée degré du revêtement lorsqu'elle est constante, par exemple lorsque  $Y$  est connexe.



**Définition I.28.** Une application  $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  entre surfaces différentielles est un revêtement ramifié si et seulement si tout point  $y$  de  $\Sigma'$  possède un voisinage  $V$  tel que  $p^{-1}(V)$  soit une réunion disjointe non vide d'ouverts  $\bigsqcup_{i \in I} U_i$  et tel que  $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  soit modelée sur  $z \in \Delta \mapsto z^k \in \Delta, k \geq 1$ .

On peut donner les mêmes définitions avec des espaces topologiques ou des surfaces de Riemann plutôt que des surfaces différentielles. Dans la Définition I.28, on dit modelé. Cela signifie conjugué avec un homéomorphisme si on parle de revêtements ramifié entre espaces topologiques, avec un difféomorphisme si on parle de surfaces différentielles, avec un biholomorphisme si on parle de surfaces de Riemann...

Le nombre de préimages, compté avec multiplicité, d'un revêtement ramifié  $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  est une fonction localement constante sur  $\Sigma'$  à valeur dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , appelée degré du revêtement lorsqu'elle est constante, par exemple lorsque  $\Sigma'$  est connexe.

**Exemple I.29.** Voici quelques exemples de revêtements ramifiés :

- 1) Un revêtement entre surfaces de Riemann est un revêtement ramifié.
- 2) L'application  $z \in \mathbb{C} \mapsto z^k \in \mathbb{C}$  est un revêtement ramifié (mais pas un revêtement comme on l'a vu).
- 3) Toute application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes est un revêtement ramifié. Pour montrer ceci on procède de la même façon que dans la Proposition I.24.

#### 1.4.2 1-formes méromorphes

**Définition I.30.** Une 1-forme holomorphe (respectivement méromorphe) sur une surface de Riemann  $\Sigma$  est la donnée, en chaque point  $z \in \Sigma$  (respectivement en chaque point qui n'est pas un pôle), d'une forme  $\mathbb{C}$ -linéaire sur  $T_z \Sigma$  qui dépend holomorphiquement (respectivement méromorphiquement) du point  $z$ .

Si  $\lambda$  est une 1-forme holomorphe (respectivement méromorphe) sur  $\Sigma$  et si  $\varphi_i : U_i \subset \Sigma \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$  est une carte de  $\Sigma$ , alors dans cette carte,  $\lambda$  s'écrit  $\lambda_i = f_i(z)dz$  où  $f_i$  est une fonction holomorphe (respectivement méromorphe) de  $V_i$ .

Si  $\varphi_j : U_j \subset \Sigma \rightarrow V_j \subset \mathbb{C}$  est une autre carte,  $\lambda$  se lit dans cette nouvelle carte  $\lambda_j = f_j(z)dz$ , où  $f_j$  est holomorphe (respectivement méromorphe), et  $\lambda_i$  est le tiré en arrière par le changement de cartes  $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$  de  $\lambda_j$ , ce qu'on écrit  $\lambda_i = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \lambda_j$ . Ainsi, pour tout  $z \in V_i$  et tout  $v \in T_z V_i$ ,

$$\lambda_i(z)(v) = \lambda_j((\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(z)) \circ d_z(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v).$$

**Remarque I.31.** Localement, une 1-forme ressemble à une fonction holomorphe parce que c'est en tout point  $x$  de  $\Sigma$  un élément de  $T_x^* \Sigma$  qui est isomorphe à  $\mathbb{C}$ . Mais attention, cet isomorphisme n'est pas canonique, il est ici donné par la base  $dz$  qui dépend du choix de la carte. Globalement, une 1-forme et une fonction sont deux choses bien différentes.

En fait, réciproquement, la donnée sur chaque ouvert  $V_i$  de  $\mathbb{C}$  d'une 1-forme holomorphe (respectivement méromorphe)  $\lambda_i$ , telle que lorsque deux ouverts de cartes  $U_i$  et  $U_j$  s'intersectent, on ait  $\lambda_i = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \lambda_j$ , permet de définir par recollement une 1-forme holomorphe (respectivement méromorphe)  $\lambda$  sur  $\Sigma$  telle que  $\lambda|_{U_i} = \varphi_i^* \lambda_i$ .

De plus, pour tout  $x$  dans  $\Sigma$ ,  $ord_{\varphi_i(x)}(f_i) = ord_{\varphi_j(x)}(f_j)$ , avec les notations de la Définition I.30. On définit l'ordre d'annulation de  $\lambda$  comme étant cette quantité, que l'on note aussi  $ord_x(\lambda)$ . C'est encore une fois une notion préservée par les changements de cartes qui passe donc en une notion sur la variété.

**Exemple I.32.** 1) La fonction  $dz : h \in \mathbb{C} \mapsto h \in \mathbb{C}$  est une 1-forme holomorphe constante sur  $\mathbb{C}$ .

2) Cette 1-forme  $dz$  passe au quotient en une 1-forme holomorphe sur  $\mathbb{C}/\Lambda$ , quel que soit le réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}$ .

3) Sur la sphère de Riemann, soit  $\lambda_0$  la 1-forme holomorphe  $dz$  sur  $V_0 \simeq \mathbb{C}$ , et  $\lambda_\infty$  la 1-forme méromorphe  $(\varphi_0 \circ \varphi_\infty^{-1})^* \lambda_0$  sur  $V_\infty \simeq \mathbb{C}$ , où  $\varphi_0 \circ \varphi_\infty^{-1}(z) = \frac{1}{z}$  est le changement de cartes sur  $\hat{\mathbb{C}}$ . Aussi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_\infty(z) = \lambda_0(1/z) \circ d(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^2} dz$  a un pôle double en  $z = 0$ .

Ces deux formes définissent donc une 1-forme méromorphe sur  $\hat{\mathbb{C}}$  qui ne s'annule pas, mais possède un pôle double en  $\infty$ .

**Proposition I.33.** Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte. Alors la quantité  $\sum_{z \in \Sigma} ord_z(\lambda)$  ne dépend pas du choix de la 1-forme méromorphe non nulle  $\lambda$  de  $\Sigma$ .

*Démonstration.* Soient  $\lambda$  et  $\theta$  deux 1-formes méromorphes sur  $\Sigma$ . Alors  $\theta = f \cdot \lambda$ , où  $f$  est une fonction méromorphe sur  $\Sigma$ . En effet, lues dans chaque ouvert de carte,  $\theta_i = f_i \lambda_i$ , où  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$  est méromorphe. Les 1-formes satisfont  $\theta_i = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \theta_j$  et  $\lambda_i = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \lambda_j$ , de sorte que  $\theta_i = f_i \lambda_i = (f_j)|_{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \lambda_j \circ d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = f_j \lambda_i$ . Donc  $f_i = (f_j)|_{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}}$  sur l'ouvert  $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^{-1}(V_j) \subset V_i$ , et ces données locales se recollent en une fonction méromorphe sur  $\Sigma$ .

Or, pour tout point  $x$  de  $\Sigma$ ,  $ord_x(f \lambda) = ord_x(f) + ord_x(\lambda)$ , (rappelons que l'on compte les zéros et les pôles avec multiplicité). D'autre part,  $\sum_{x \in \Sigma} ord_x(f) = 0$  par la Proposition I.24, de sorte que  $\sum_{z \in \Sigma} ord_z(\theta) = \sum_{z \in \Sigma} ord_z(\lambda)$ , ce que l'on voulait démontrer.  $\square$

Dans les exemples précédents, on a exhibé des formes méromorphes sur  $\hat{\mathbb{C}}$  et sur  $\mathbb{C}/\Lambda$ , et on déduit de ces exemples et de la Proposition I.33 que la somme des ordres d'une 1-forme méromorphe sur  $\hat{\mathbb{C}}$  fait -2 et sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  fait 0. On voit la différence globalement avec une fonction méromorphe dont la somme des ordres fait toujours zéro d'après le Proposition I.24, différence signalée dans la Remarque I.31.

**Définition I.34.** On appelle caractéristique d'Euler d'une surface de Riemann compacte la quantité  $\chi(z) = -\sum_{z \in \Sigma} ord_z(\lambda)$ , où  $\lambda$  est une 1-forme méromorphe non nulle de  $\Sigma$ .

On déduit des remarques précédentes que la caractéristique d'Euler de la sphère de Riemann vaut 2 tandis que celle d'une courbe elliptique vaut 0.

**Corollaire I.35.** *Il n'existe pas de 1-forme holomorphe non nulle sur la sphère de Riemann.*

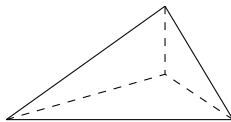
#### 1.4.3 Digression : La caractéristique d'Euler

On pourra consulter [BRE] pour en connaître davantage sur cette partie.

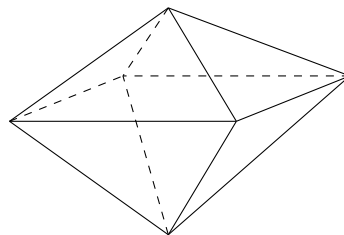
**Définition I.36.** *Un complexe simplicial de dimension 2 est une réunion de triangles telle que l'intersection entre deux triangles est soit vide, soit un sommet, soit une arête.*

**Exemple I.37.** *Le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre sont trois exemples de complexes simpliciaux. Mais attention, dans la Définition I.36, on n'a pas supposé que le complexe simplicial se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ .*

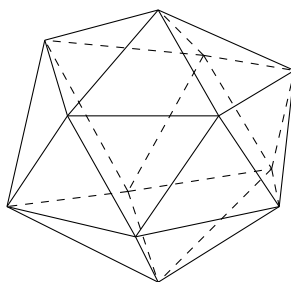
1) *Le tétraèdre :*



2) *L'octaèdre :*



3) *L'icosaèdre :*



**Définition I.38.** *On appelle triangulation d'une surface différentielle  $\Sigma$  tout homéomorphisme entre  $\Sigma$  et un complexe simplicial de dimension deux.*

**Remarque I.39.** *Toute arête appartient alors à exactement deux triangles.*

**Définition I.40.** La caractéristique d'Euler d'une triangulation finie  $\mathcal{T}$  sur une surface différentielle  $\Sigma$  est la quantité suivante :

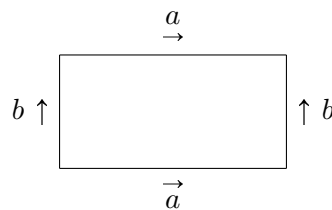
$$\chi(\mathcal{T}) = \text{Card}(S) - \text{Card}(A) + \text{Card}(T),$$

où  $S$  (respectivement  $A$ , respectivement  $T$ ) désigne l'ensemble des sommets (respectivement des arêtes, respectivement des triangles) de  $\mathcal{T}$ .

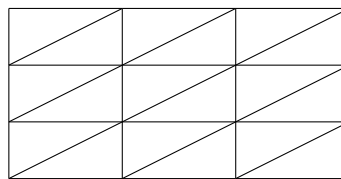
**Exemple I.41.** On peut calculer la caractéristique d'Euler des complexes simpliciaux de l'Exemple I.37 (on remarquera que tous les sommets, toutes les arêtes et tous les triangles apparaissent sur les dessins) :

- 1) Pour le tétraèdre,  $\text{Card}(S)=4$ ,  $\text{Card}(A)=6$  et  $\text{Card}(T)=4$ , donc la caractéristique du tétraèdre vaut 2.
- 2) Pour l'octaèdre,  $\text{Card}(S)=6$ ,  $\text{Card}(A)=12$  et  $\text{Card}(T)=8$ , donc la caractéristique de l'octaèdre vaut 2.
- 3) Pour l'icosaèdre,  $\text{Card}(S)=12$ ,  $\text{Card}(A)=30$  et  $\text{Card}(T)=20$ , donc la caractéristique de l'icosaèdre vaut 2.

**Exemple I.42.** On calcule maintenant la caractéristique d'Euler d'une triangulation du tore  $\mathbb{T}^2$ . On rappelle qu'on obtient le tore en identifiant les côtés opposés deux à deux d'un rectangle comme ceci :



On équipe le tore de la triangulation suivante :



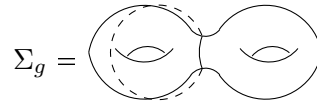
Cette triangulation possède 9 sommets, 27 arêtes et 18 triangles, sa caractéristique d'Euler est donc nulle.

**Théorème I.43.** Soit  $\Sigma$  une surface différentielle compacte. Alors  $\Sigma$  possède une triangulation et la caractéristique d'Euler de toute triangulation est la même.

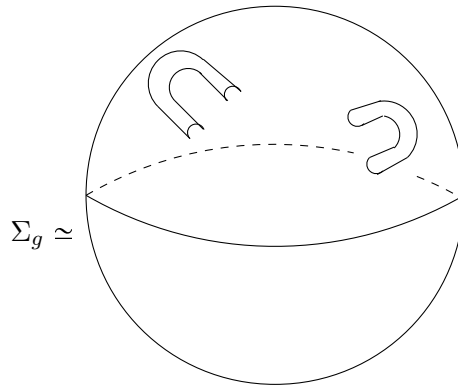
**Définition I.44.** Au vu du Théorème I.43, on appelle caractéristique d'Euler d'une surface différentielle compacte la caractéristique d'Euler de ses triangulations.

**Exemple I.45.** Avant de donner une idée de démonstration du Théorème I.43, en voici quelques exemples d'application.

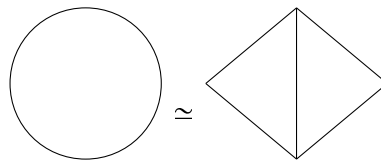
- 1) D'après les calculs qui précèdent, la caractéristique d'Euler de la sphère  $\mathbb{S}^2$  vaut 2 et celle du tore  $\mathbb{T}^2$  vaut 0.
- 2) On va montrer que la caractéristique d'Euler d'une surface connexe de genre  $g$  vaut  $2 - 2g$ . On rappelle qu'une surface de genre  $g$  est un tore à  $g$  trous. On note  $\Sigma_g$  une telle surface et on fait les dessins pour  $g = 2$  :



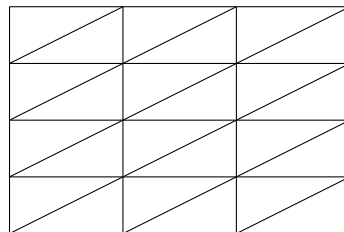
On peut obtenir  $\Sigma_g$  en enlevant  $2g$  disques à une sphère et en y recollant  $g$  cylindres, ce qui forme  $g$  « anses » (on obtient une surface homéomorphe à  $\Sigma_g$ ).



On munit la sphère d'une triangulation ayant beaucoup de triangles, et les  $2g$  disques que l'on enlève sont en fait chacun des réunions de deux triangles :



Le bord du disque a quatre arêtes. Pour pouvoir recoller les cylindres, il faut que chaque composante de leur bord possède également 4 arêtes. On triangule donc les cylindres que l'on rajoute de la manière suivante :



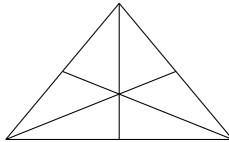
La caractéristique d'Euler du cylindre vaut  $16-40+24=0$ , et celle du disque est  $4-5+2=1$ . Enfin on note  $\mathcal{C}$  le cylindre, et  $\mathcal{D}$  le disque, pour obtenir :

$$\chi(\Sigma_g) = \chi(\mathbb{S}^2) - 2g\chi(\mathcal{D}) + g\chi(\mathcal{C}) = 2 - 2g \times 1 + g \times 0 = 2 - 2g.$$

**Corollaire I.46.** *La caractéristique d'Euler est invariante par homéomorphisme. Donc en particulier,  $\Sigma_g \simeq \Sigma_{g'}$  si et seulement si  $g = g'$ .*

*Démonstration.* Voici en trois étapes une stratégie de démonstration de la Proposition I.43.

- 1) On montre l'existence d'une triangulation par la méthode de H. Whitney en commençant par plonger  $\Sigma$  dans un  $\mathbb{R}^N$  puis en intersectant  $\Sigma$  avec le réseau  $\epsilon\mathbb{Z}^N$ , où  $\epsilon$  est choisi « petit ». Lorsque l'on zoom en un point, une sous-variété de dimension 2 ressemble à un plan, donc l'intersection avec le pavage en cubes de taille  $\epsilon$  de  $\mathbb{R}^N$  découpe la surface en polygones qu'il suffit de découper en triangles.
- 2) La caractéristique d'Euler d'une triangulation ne change pas lorsque l'on effectue une subdivision :



3)

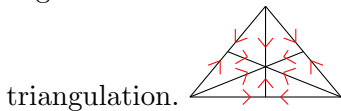
**Théorème I.47.** *Deux triangulations possèdent une subdivision commune, à homéomorphisme près.*

□

**Proposition I.48.** *Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte. Alors ses caractéristiques d'Euler au sens des Définitions I.34 et I.44 coïncident.*

*Démonstration.* Voici en trois étapes une stratégie de démonstration de la Proposition I.48.

- 1) On associe à toute triangulation dont les arêtes sont lisses un champ de vecteurs non dégénéré dont la somme des indices coïncide avec la caractéristique d'Euler de la



- 2) La somme des indices d'un champ de vecteurs de  $\Sigma$  ne dépend pas du choix du champ de vecteurs. C'est en fait l'indice d'intersection de la surface de  $T\Sigma$  définie par ce champ de vecteurs avec la section nulle (voir l'exercice 1 du TD3).
- 3) Si  $\lambda$  est une 1-forme méromorphe sur  $\Sigma$ , on choisit un champ de vecteurs non dégénéré  $V$  de  $\Sigma$ , holomorphe au voisinage des pôles de  $\lambda$ , de sorte que  $\lambda(V)$  soit une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\Sigma$  s'annulant transversalement. L'indice total d'annulation de  $\lambda(V)$  coïncide

avec la somme de l'ordre d'annulation de  $\lambda$  et de l'indice total d'annulation de  $V$ , donc avec la différence des caractéristiques d'Euler de  $\Sigma$  au sens des définitions I.34 et I.44.

- 4) On conclut alors en remarquant que l'indice total d'annulation d'une fonction lisse sur  $\Sigma$  est nul, c'est l'indice d'intersection de son graphe dans  $\Sigma \times \mathbb{C}$  avec  $\Sigma \times \{0\}$ . Un résultat à comparer avec la Proposition I.24.

□

#### 1.4.4 Formule de Riemann-Hurwitz

Soit  $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  un revêtement ramifié entre surfaces différentielles et  $z_0 \in \Sigma$  un point critique de  $p$ . Par définition, au voisinage de  $z_0$ ,  $p$  est conjugué à l'application  $z \in \mathbb{C} \rightarrow z^k \in \mathbb{C}$ , où  $k \geq 1$ .

**Définition I.49.** *L'entier  $k - 1$  est appelé l'indice de ramification de  $p$  en  $z_0$ .*

Cet indice de ramification est l'ordre d'annulation de  $p'$  en  $z_0$ .

**Théorème I.50** (Formule de Riemann-Hurwitz). *Soit  $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  un revêtement ramifié de degré  $d$  entre surfaces différentielles compactes. Alors*

$$\chi(\Sigma) = d\chi(\Sigma') - R,$$

où  $R$  désigne la somme des indices de ramification des points critiques de  $p$ .

On propose deux démonstrations du Théorème I.50.

(*Première démonstration*). Supposons que  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  soient des surfaces de Riemann et que  $p$  soit holomorphe. Soit  $\lambda'$  une 1-forme méromorphe sur  $\Sigma'$ , dont on suppose pour simplifier les zéros et les pôles disjoints des valeurs critiques de  $p$ . (On peut en fait toujours choisir une telle 1-forme méromorphe, mais cela nécessiterait une démonstration, tout comme l'existence même d'une 1-forme méromorphe en fait, voir le Théorème II.56 et les remarques qui suivent). On tire en arrière  $\lambda'$  par  $p$  et on pose  $\lambda = p^*\lambda'$ . Alors  $\lambda(z) = \lambda'(p(z)) \circ d_z p$ . Les pôles de  $\lambda$  sont les préimages des pôles de  $\lambda'$  et chaque pôle de  $\lambda'$  d'ordre  $k$  possède exactement  $d$  préimages, tous pôles d'ordre  $k$  de  $\lambda$ . Les zéros de  $\lambda$  correspondent aux préimages des zéros de  $\lambda'$  et aux points critiques de  $p$ . Dans le premier cas, comme pour les pôles, la contribution à la somme des ordres d'annulation vaut  $d$  fois celle de  $\lambda'$ , et dans le deuxième cas chaque point critique  $z_0$  de  $p$  d'indice de ramification  $r > 0$  est un zéro d'ordre  $r$  de  $\lambda$ . Finalement, on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{z \text{ pôle de } \lambda} \text{ord}_z(\lambda) &= d \sum_{z' \text{ pôle de } \lambda'} \text{ord}_{z'}(\lambda'), \\ \sum_{z \text{ zéro de } \lambda} \text{ord}_z(\lambda) &= d \sum_{z' \text{ zéro de } \lambda'} \text{ord}_{z'}(\lambda') + R. \end{aligned}$$

On en déduit  $\chi(\Sigma) = d\chi(\Sigma') - R$ .

□

**Exercice I.51.** Montrer la même formule sans supposer que les zéros et pôles de  $\lambda'$  sont disjoints des valeurs critiques de  $p$ .

(Deuxième démonstration). On choisit une triangulation  $\tau'$  de  $\Sigma'$  telle que chaque valeur critique de  $p$  soit un sommet de la triangulation et telle que chaque arête de chaque triangle soit dans un ouvert modèle du revêtement. Alors la préimage  $\tau$  de  $\tau'$  par  $p$  fournit une triangulation de  $\Sigma$ . De plus, au-dessus de chaque triangle ou arête de  $\tau'$  se trouvent exactement  $d$  triangles ou arêtes de  $\tau$ . Il en est de même au-dessus de chaque sommet de  $\tau'$  qui n'est pas valeur critique de  $p$ . Enfin au-dessus des valeurs critiques de  $p$ , il y en a  $R$  de moins au total. Ainsi,  $Card(S) = dCard(S') - R$ ,  $Card(A) = dCard(A')$  et  $Card(T) = dCard(T')$ , donc  $\chi(\Sigma) = d\chi(\Sigma') - R$ .  $\square$

**Corollaire I.52.** 1) Soit  $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  un revêtement de degré  $d$ , alors  $\chi(\Sigma) = d\chi(\Sigma')$ . En particulier, il n'existe pas de revêtement non trivial de la sphère de Riemann dans elle-même.

2) Plus généralement, si  $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  est un revêtement ramifié et si  $\chi(\Sigma') \leq 0$ , alors  $\chi(\Sigma) \leq \chi(\Sigma')$ . En particulier, il n'existe pas d'application holomorphe non constante de  $\hat{\mathbb{C}}$  dans  $\mathbb{C}/\Lambda$ , ou de  $\hat{\mathbb{C}}$  dans  $\Sigma$  avec  $\chi(\Sigma) \leq 0$ .

## 1.5 Les courbes projectives lisses

### 1.5.1 Les espaces projectifs complexes

**Définition I.53.** On appelle espace projectif complexe de dimension  $n$  l'espace des droites vectorielles complexes de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Il est noté  $\mathbb{C}P^n$  ou  $P(\mathbb{C}^{n+1})$ . C'est le quotient  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / (x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}^*)$ .

Tout point  $x$  de  $\mathbb{C}P^n$  est donc représenté de façon unique par un  $(n+1)$ -uplet de nombres complexes non tous nuls modulo multiplication de tous ces nombres par un même scalaire  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Un tel  $(n+1)$ -uplet modulo cette relation d'équivalence est noté  $[x_0 : \dots : x_n]$  et appelé coordonnée homogène du point  $x$  de  $\mathbb{C}P^n$ .

On note  $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  et pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$   
 $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{C}P^n, x_i \neq 0\}$  et  $V_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, x_i = 1\}$ .

On note enfin

$$\varphi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \rightarrow & V_i \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

Alors, les applications  $\varphi_i$  définissent un atlas de  $\mathbb{C}P^n$  dont les cartes sont appelées cartes affines standard. On en déduit la proposition suivante :

**Proposition I.54.** Quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  est une variété complexe compacte connexe de dimension  $n$ .



*Démonstration.* L'atlas formé par les cartes affines standard munit  $\mathbb{C}P^n$  d'une structure de variété complexe de dimension  $n$ . De plus, la restriction de  $p$  à la sphère  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  est continue et surjective. Comme  $\mathbb{S}^{2n+1}$  est compacte et connexe, il en est de même pour  $\mathbb{C}P^n$ .  $\square$

Notons  $W_i = \varphi_i(U_i \cap U_j)$  et  $W_j = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ , de sorte que

$$W_i = \{(x_0, \dots, x_n), x_i = 1, x_j \neq 0\}$$

et

$$W_j = \{(x_0, \dots, x_n), x_j = 1, x_i \neq 0\}.$$

Alors, le changement de cartes entre  $V_i = \{(x_0, \dots, x_n), x_i = 1\}$  et  $V_j = \{(x_0, \dots, x_n), x_j = 1\}$  s'écrit

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \begin{array}{ccc} W_i & \rightarrow & W_j \\ (x_0, \dots, x_n) & \mapsto & \left( \frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right). \end{array}$$

**Exemple I.55.** 1) La droite projective complexe  $\mathbb{C}P^1$  est biholomorphe à la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . Elle est en effet recouverte par deux copies de  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi_0 : U_0 \rightarrow V_0 \simeq \mathbb{C}$  et  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \simeq \mathbb{C}$  et l'application de changement de cartes s'écrit  $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : z \in V_0 \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in V_1 \setminus \{0\}$  d'après ce qui précède.

C'est la réunion disjointe de  $U_1 \simeq V_1 \simeq \mathbb{C}$  et du singleton  $\{[1 : 0]\}$ , l'axe des abscisses.

2) De même le plan projectif complexe est une réunion disjointe :

$$\mathbb{C}P^2 = U_2 \sqcup P([x_0 : x_1 : 0]) \simeq \mathbb{C}^2 \sqcup \mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{C}^2 \sqcup \mathbb{C} \sqcup \{\text{point}\},$$

et de manière générale,  $\mathbb{C}P^n \simeq \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{C}P^{n-1}$ .

**Exercice I.56.** L'espace projectif réel de dimension  $n$  est de même une variété différentielle compacte connexe de dimension  $n$ , notée  $\mathbb{R}P^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ , définie par  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / (x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*)$ .

- 1) Montrer que  $\mathbb{R}P^1$  est difféomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ .
- 2) Montrer que  $\mathbb{R}P^2$  est non orientable, réunion d'un disque et d'un ruban de Möbius.
- 3) Montrer qu'en général,  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / (x \sim -x)$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair.

### 1.5.2 Les courbes planes

**Définition I.57.** On appelle courbe projective lisse toute sous-variété complexe compacte de dimension un d'un espace projectif complexe.

Ces courbes projectives sont donc des surfaces de Riemann compactes plongées dans un espace projectif.

**Exercice I.58.** Montrer que si une surface de Riemann compacte  $\Sigma$  se plonge dans  $\mathbb{C}P^n$ , alors elle se plonge également dans  $\mathbb{C}P^3$  et s'immerge dans  $\mathbb{C}P^2$  (voir l'exercice 2 du TDA).

Étudions le cas particulier des courbes planes. Soit  $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2] \setminus \{0\}$  un polynôme homogène de degré  $d > 0$ , c'est-à-dire tel que pour tout complexe  $\lambda$ , et pour tous complexes  $x_0, x_1, x_2$ , on a  $P(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^d P(x_0, x_1, x_2)$ . Le lieu d'annulation de  $P$  dans  $\mathbb{C}^3$  est un cône, un ensemble de droites de  $\mathbb{C}^3$ , qui passe donc au quotient en un sous-ensemble de  $\mathbb{C}P^2$  noté  $V_P = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{C}P^2, P(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ .

Attention : la fonction polynomiale  $P : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  ne passe pas au quotient en une fonction sur  $\mathbb{C}P^2$ , puisque les autres ensembles de niveaux de  $P$  ne sont pas des cônes. D'ailleurs,  $\mathbb{C}P^2$  étant compacte, toute fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}P^2$  est constante, puisqu'une telle fonction est sinon ouverte et atteint son maximum.

**Exemple I.59.** 1. Si  $P(X_0, X_1, X_2) = X_2$ , alors  $V_P = \{[X_0, X_1, 0] \in \mathbb{C}P^2\} \simeq \mathbb{C}P^1$  est une droite.

2. Si  $P(X_0, X_1, X_2) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$ , alors la trace de  $V_P$  dans toute carte affine standard est une conique lisse.

$$\begin{aligned} \text{Par exemple, } \varphi_2(V_P \cap U_2) &= \{(x_0, x_1, 1) \in \mathbb{C}^3, P(x_0, x_1, 1) = 0\} \\ &= \{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2, x_0^2 + x_1^2 = -1\}. \end{aligned}$$

$V_P$  est donc une conique projective lisse.

**Définition I.60.** On appelle courbe affine complexe toute trace dans une carte affine standard d'une courbe projective complexe.

**Proposition I.61.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$  un polynôme homogène tel que  $P, \frac{\partial P}{\partial X_0}, \frac{\partial P}{\partial X_1}$  et  $\frac{\partial P}{\partial X_2}$  n'ont pas de zéros en commun en dehors de  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Alors  $V_P$  est une sous-variété de dimension un de  $\mathbb{C}P^2$ .

*Démonstration.* Le résultat découle du théorème des fonctions implicites appliqué dans chaque carte affine standard de  $\mathbb{C}P^2$ . Dans la carte  $\phi_0 : U_0 \rightarrow V_0$  par exemple,  $V_P \cap U_0$  se lit comme le lieu d'annulation du polynôme  $Q(X_1, X_2) = P(1, X_1, X_2)$ . On a  $\frac{\partial Q}{\partial X_1} = \frac{\partial P}{\partial X_1}(1, X_1, X_2)$  et  $\frac{\partial Q}{\partial X_2} = \frac{\partial P}{\partial X_2}(1, X_1, X_2)$ . Or le polynôme  $P$  est homogène, de sorte que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $P(\lambda X_0, \lambda X_1, \lambda X_2) = \lambda^d P(X_0, X_1, X_2)$ . Par dérivation en  $\lambda$ , on obtient la relation d'Euler  $X_0 \frac{\partial P}{\partial X_0} + X_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial P}{\partial X_2} = dP(X_0, X_1, X_2)$ . Le point  $(1, X_1, X_2)$  étant dans  $V_P$ , on a  $\frac{\partial P}{\partial X_0} + X_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial P}{\partial X_2} = 0$ , de sorte que  $\frac{\partial P}{\partial X_1}$  et  $\frac{\partial P}{\partial X_2}$  ne peuvent pas simultanément s'annuler par hypothèse. Ainsi,  $d|_{(X_1, X_2)} Q$  est surjectif, 0 est valeur régulière et d'après le théorème des fonctions implicites,  $V_P \cap U_0$  est une sous-variété de  $U_0 \cong \mathbb{C}^2$ . Il en est de même pour  $V_P \cap U_1$  et  $V_P \cap U_2$ , d'où le résultat.  $\square$

**Exercice I.62.** 1. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré  $d$  qui satisfont les hypothèses de la Proposition I.61 forme un ouvert dense et connexe par arcs dans l'ensemble des polynômes de degré  $d$  de  $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$  (pour la topologie d'espace vectoriel de dimension fini normé, on pourra d'ailleurs commencer par calculer la dimension de cet espace vectoriel).

2. Montrer qu'en particulier tous ces polynômes sont irréductibles (voir l'exercice 1 du TD5).

**Théorème I.63** (Formule de Plücker du genre pour les courbes planes). Soit  $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$  un polynôme homogène de degré  $d$  satisfaisant les hypothèses de la Proposition I.61. Alors  $\chi(V_P) = 2 - 2g$ , avec  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, l'action naturelle de  $GL_3(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}^3$  envoie droite sur droite donc passe au quotient en une action de  $GL_3(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}P^2$ . De plus, l'action de  $GL_3(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}^3$  est transitive sur les droites et sur les plans. Son action sur  $\mathbb{C}P^2$  est donc transitive sur les points et les droites projectives.

D'autre part, soit  $O \in \mathbb{C}P^2 \setminus V_P$ . Quitte à composer  $P$  par un élément de  $GL_3(\mathbb{C})$ , on peut supposer que  $O = [0 : 0 : 1] \in U_2 \subset \mathbb{C}P^2$ . L'ensemble des droites projectives qui passent par  $O$  est identifié par la carte affine standard  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \simeq \mathbb{C}^2$  à l'ensemble des droites de  $\mathbb{C}^2$  qui passent par  $0$ , c'est donc une droite projective  $\mathbb{C}P^1$ . On en déduit une application holomorphe non constante  $\pi : V_P \rightarrow \mathbb{C}P^1$  qui à un point  $p$  de  $V_P$  associe la droite projective passant par  $O$  et  $p$ . C'est un revêtement ramifié par le troisième point de l'Exemple I.29. On va calculer son degré et son indice total de ramification pour déduire le résultat de la formule de Riemann-Hurwitz.

Soit  $D = [X_0, X_1] \in \mathbb{C}P^1$  une droite projective qui passe par  $O$ , valeur régulière de  $\pi$ . Alors,  $D \cap V_P \cap U_2 \simeq \{\lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda X_0, \lambda X_1, 1) = 0\}$ , où on note encore  $P$  la restriction de  $P$  à  $V_2$ .

Notons  $Q(\lambda) = P(\lambda X_0, \lambda X_1, 1)$

$$= R_0(X_0, X_1) + \lambda R_1(X_0, X_1) + \dots + \lambda^d R_d(X_0, X_1)$$

avec  $R_0, \dots, R_d$  des polynômes homogènes de degré  $0, \dots, d$  respectivement.

Si  $R_d(X_0, X_1) \neq 0$ , alors  $Q$  est de degré  $d$ . Or  $R_d$  n'est pas le polynôme nul, puisque  $P$  est irréductible, donc ne se factorise pas par  $X_2$ . Par suite,  $R_d$  a  $d$  racines dans  $\mathbb{C}P^1$  (comptées avec multiplicité) correspondant aux points d'intersection de  $V_P$  avec la droite à l'infini  $\{[X_0 : X_1 : 0] \in \mathbb{C}P^2\}$ . On choisit  $D$  en dehors de ce lieu d'annulation de  $R_d(X_0, X_1)$ . Alors l'ensemble  $D \cap V_P$  coïncide avec  $D \cap V_P \cap U_2$  et s'identifie aux racines de  $Q$ . Le polynôme  $Q$  possède  $d$  racines distinctes dès que  $Q$  et  $Q'$  n'ont pas de racines en commun, c'est-à-dire dès que  $(X_0, X_1)$  n'est pas racine du polynôme  $Res(Q, Q')$ . Ainsi  $\pi$  est de degré  $d$ .

Les points de ramification de  $\pi$  sont les points critiques de  $\pi$ , ils correspondent aux droites  $D = (0, p)$  tangente à  $V_P$ , c'est-à-dire aux points où  $Q$  possède une racine multiple. Quitte à composer  $P$  par un élément de  $GL_3(\mathbb{C})$ , on peut en effet supposer que la droite à l'infini  $\{[X_0 : X_1 : 0] \in \mathbb{C}P^2\}$  ne contient aucun de ces points de ramification (qui sont en nombre fini) et intersecte  $V_P$  en  $d$  points distincts ( $R_d$  est alors

sans point multiple). On introduit  $Res(Q, Q') =$

$$\begin{vmatrix} R_0 & 0 & R_1 & & 0 \\ R_1 & \ddots & & 2R_2 & \ddots & \\ \vdots & & R_0 & \vdots & & \ddots \\ \vdots & & \vdots & dR_d & & R_1 \\ R_d & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots \\ 0 & & R_d & 0 & & dR_d \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant d'une matrice carrée de taille  $2d - 1$ . Ce déterminant s'annule si et seulement si  $deg(Q) < d$  ou  $deg(Q) = d$  et  $Q$  possède une racine multiple. Les points où  $deg(Q) < d$  correspondent aux racines de  $R_d$ , c'est-à-dire aux  $d$  points distincts d'intersection entre  $V_P$  et la droite à l'infini  $\{[X_0 : X_1 : 0] \in \mathbb{C}P^2\}$ . Les points où  $Q$  possède une racine multiple correspondent aux points de ramification de  $\pi$ , et la multiplicité de la racine vaut  $1 +$  l'indice de ramification en ce point. Aussi,  $deg(Res(Q, Q')) = d +$  indice de ramification total. (En fait, pour un choix générique de  $O \in \mathbb{C}P^2 \setminus V_P$ , tous les points de ramification sont simples, c-à-d d'indice 1, et toutes les valeurs critiques correspondantes sont distinctes, en dehors des racines de  $R_d$ ).

$$\begin{aligned} \text{Or } deg(Res(Q, Q')) &= deg\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2d-1}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(2d-1),2d-1}\right) \\ &\leq (\sigma(1) - 1) + (\sigma(2) - 2) + \dots + (\sigma(d-1) - (d-1)) \\ &\quad + \sigma(d) + (\sigma(d+1) - 1) + \dots + (\sigma(2d-1) - (d-1)). \\ &\leq \sum_{i=1}^{2d-1} i - 2 \sum_{i=1}^{d-1} i = d^2 \end{aligned}$$

D'autre part, si  $R_1 = \dots = R_{d-1} = 0$ , et  $R_0 \neq 0 \neq R_d$ , alors  $deg(Res(Q, Q')) = d^2$ . Donc  $deg(Res(Q, Q')) = d^2$  sur un ouvert dense et finalement, l'indice de ramification total de  $\pi$  vaut  $d^2 - d$ .

Ainsi, par la formule de Riemann-Hurwitz,  $\chi(V_P) = 2d - (d^2 - d) = 3d - d^2$ . On en déduit  $\chi(V_P) = 2 - 2g$ , avec  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .  $\square$

**Exemple I.64.**

Si  $d = 1$ ,  $\chi(V_P) = 2$ ,  $g = 0$ .

Si  $d = 2$ ,  $\chi(V_P) = 2$ ,  $g = 0$ .

Si  $d = 3$ ,  $\chi(V_P) = 0$ ,  $g = 1$ .

Si  $d = 4$ ,  $\chi(V_P) = -4$ ,  $g = 3$ .

On conclut cette première partie par un exercice :

**Exercice I.65.** 1) Montrer que  $V_P$  est connexe sous les hypothèses du Théorème I.63.

2) À l'aide d'une projection stéréographique, montrer que toute conique projective lisse possède un paramétrage par la sphère de Riemann.

## II Fibrés en droites holomorphes

### 2.1 Fibrés vectoriels, sections

#### 2.1.1 Fibrés vectoriels réels et complexes

**Définition II.1.** Un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) sur une variété différentielle  $\Sigma$  est la donnée d'une variété différentielle  $E$  et d'une submersion  $p : E \rightarrow \Sigma$  dont les fibres sont des espaces vectoriels et qui est localement triviale, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement de  $E$  par des ouverts  $p^{-1}(U_i)$ , où  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $\Sigma$ , ainsi que des difféomorphismes appelés trivialisations locales  $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^k$ , tels que les applications de changement de trivialisation

$$\Phi_{i,j} := \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^k$$

soient de la forme  $\Phi_{i,j}(x, v) = (x, g_{i,j}(x)(v))$  où  $g_{i,j}$  est un élément de  $\mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, GL_n(\mathbb{K}))$ . L'entier  $k$  est appelé le rang du fibré.

**Exemple II.2.** 1) Le fibré trivial :

Pour toute variété différentielle  $\Sigma$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $p : (x, v) \in \Sigma \times \mathbb{K}^k \rightarrow x \in \Sigma$  munit  $\Sigma \times \mathbb{K}^k$  d'une structure de fibré vectoriel de rang  $k$  appelé fibré trivial. Par définition, tout fibré est localement modelé sur le fibré trivial, c'est pourquoi on dit qu'il est localement trivial.

2) Le fibré tangent :

Pour toute variété différentielle  $\Sigma$ , la projection  $p : T\Sigma \rightarrow \Sigma$  équipe  $T\Sigma$  d'une structure de fibré vectoriel réel de rang  $n = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma$ , muni des trivialisations locales  $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ , avec changements de trivialisation

$$\Phi_{i,j} : (x, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \mapsto (x, d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v)) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n.$$

**Remarque II.3.** 1) La Définition II.1 permet de construire des fibrés vectoriels en recollant des confettis tous semblables, des produits  $V \times \mathbb{R}^n$  où  $V$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$ , par des applications de recollement qui sont des  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphismes linéaires dans les fibres de la forme

$$(x, v) \in (W_i \subset V_i) \times \mathbb{R}^n \mapsto (\phi_{i,j}(x), g_{i,j}(x)(v)) \in (W_j \subset V_j) \times \mathbb{R}^n,$$

avec  $g_{i,j}(x) \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $g_{i,k} = g_{j,k} \circ g_{i,j}$ .

2) Si  $p : E \rightarrow \Sigma$  est un fibré vectoriel complexe de rang  $k$ , c'est en particulier un fibré vectoriel réel de rang  $2k$ , par oubli de la structure complexe. Réciproquement, un fibré vectoriel réel de rang  $2k$  peut-être muni d'une structure de fibré vectoriel complexe sur une surface différentielle  $\Sigma$  si et seulement s'il existe un difféomorphisme  $J : E \rightarrow E$  tel le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{J} & E \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \Sigma & \xrightarrow{id} & \Sigma \end{array}$$

soit commutatif, et tel que la restriction de  $J$  aux fibres de  $p$  soit linéaire et satisfait  $J^2 = -Id$ . Un tel endomorphisme permet de définir une multiplication par  $i$  dans les fibres et donc d'étendre la multiplication des scalaires réels en multiplication par les scalaires complexes.

### 2.1.2 Fibrés vectoriels holomorphes

**Définition II.4.** Un fibré vectoriel holomorphe de rang  $k$  sur une variété complexe  $\Sigma$  est la donnée d'une variété complexe  $E$  munie d'une submersion holomorphe  $p : E \rightarrow \Sigma$  localement triviale dont les fibres sont des espaces vectoriels complexes.

C'est-à-dire qu'il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $\Sigma$  et des biholomorphismes  $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^k$  appelés trivialisations locales, tels que les changements de trivialisations

$$\Phi_{i,j} := \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k$$

soient de la forme  $\Phi_{i,j}(x, v) = (x, g_{i,j}(x)(v))$ , où  $g_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  est holomorphe.

**Exemple II.5.** 1) Le fibré trivial  $p : (x, v) \in \Sigma \times \mathbb{C}^k \mapsto x \in \Sigma$  sur une variété complexe.

2) Le fibré tangent  $p : T\Sigma \rightarrow \Sigma$  d'une variété complexe.

3) Le fibré tautologique sur  $\mathbb{C}P^n$  :

Soit  $\gamma$  l'ensemble des couples  $((x_0, \dots, x_n), [u_0 : \dots : u_n]) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n$  qui vérifient  $[x_0 : \dots : x_n] = [u_0 : \dots : u_n]$  lorsque  $(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ . Alors la projection  $p_2 : \gamma \rightarrow \mathbb{C}P^n$  sur le deuxième facteur équipe  $\gamma$  d'une structure de fibré en droites holomorphe sur  $\mathbb{C}P^n$  appelé fibré tautologique.  $\gamma|_{[u_0 : \dots : u_n]} = p_2^{-1}([u_0 : \dots : u_n])$  est la droite complexe de  $\mathbb{C}^{n+1}$  que représente  $[u_0 : \dots : u_n]$ .

4) Les fibrés en droite sur  $\mathbb{C}P^1$  :

Soient  $\varphi_0 : U_0 \rightarrow V_0 \simeq \mathbb{C}$  et  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \simeq \mathbb{C}$  les deux cartes affines standard de  $\mathbb{C}P^1$ . On rappelle que l'application de changement de cartes est donnée par  $z \in V_0 \setminus \{0\} \mapsto 1/z \in V_1 \setminus \{0\}$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On note  $L_k$  le fibré en droites holomorphe sur  $\mathbb{C}P^1$  obtenu en recollant  $V_0 \times \mathbb{C}$  et  $V_1 \times \mathbb{C}$  par l'application  $(z, v) \mapsto (1/z, (1/z)^k v)$ , c'est-à-dire  $g_{0,1}(z) = (1/z)^k$ .

**Exercice II.6.** Vérifier que  $L_0$  est isomorphe au fibré trivial,  $L_{-1}$  au fibré tautologique, et  $L_2$  au fibré tangent  $T\mathbb{C}P^1$  (voir l'exercice 3 du TD6).

5) Plus généralement, soit  $\Sigma$  une surface de Riemann, soit  $x \in \Sigma$ , et soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\varphi : (U, x) \rightarrow (V, 0) \subset \mathbb{C}$  une carte au voisinage de  $x$ . On note  $L_{k,x}$  le fibré en droites holomorphe sur  $\Sigma$  obtenu en recollant  $(\Sigma \setminus \{x\}) \times \mathbb{C}$  et  $U \times \mathbb{C}$  par  $(y, v) \mapsto (y, \varphi(y)^k v)$ .

**Définition II.7.** Soit  $p : E \rightarrow \Sigma$  un fibré vectoriel holomorphe sur la variété complexe  $\Sigma$ . On appelle sous-fibré de  $E$  toute sous-variété complexe  $F$  de  $E$  telle que la restriction de  $p$  à  $F$  équipe  $F$  d'une structure de fibré vectoriel holomorphe.

On appelle fibré quotient de  $E$  par  $F$  le fibré vectoriel holomorphe dont les fibres sont les quotients des fibres de  $E$  par celles de  $F$ . L'application de changement de trivialisation est induite par celle de  $E$ .

**Exemple II.8.** Le fibré tautologique  $\gamma$  est par définition un sous-fibré du fibré trivial de rang  $n + 1$  de  $\mathbb{C}P^n$ .

**Définition II.9.** Un morphisme entre fibrés vectoriels holomorphes  $p_1 : E_1 \rightarrow \Sigma$  et  $p_2 : E_2 \rightarrow \Sigma$  sur la variété complexe  $\Sigma$  est un biholomorphisme  $\Psi : E_1 \rightarrow E_2$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Psi} & E_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ \Sigma & \xrightarrow{id} & \Sigma \end{array}$$

soit commutatif et tel que la restriction de  $\Psi$  à chaque fibre soit linéaire. Un automorphisme de fibrés est un morphisme inversible.

**Définition II.10.** Soit  $p : E \rightarrow \Sigma$  un fibré vectoriel holomorphe et  $\varphi : C \rightarrow \Sigma$  une application holomorphe entre variétés complexes. On appelle tiré en arrière de  $E$  par  $\varphi$  le fibré vectoriel holomorphe  $\varphi^*E$  de  $C$  défini par

$$\varphi^*E = \{(x, e) \in C \times E, \varphi(x) = p(e)\},$$

muni de la projection sur le premier facteur.

**Remarque II.11.** Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Psi} & E_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma' \end{array}$$

analogue à celui de la Définition II.9 s'interprète comme un morphisme de fibré entre  $E_1$  et  $\varphi^*E_2$  sur  $\Sigma$ .

**Exemple II.12.** Soit  $\varphi : \Sigma \rightarrow X$  un plongement holomorphe d'une surface de Riemann  $\Sigma$  dans une variété complexe  $X$ . Alors la différentielle de  $\varphi$  définit un morphisme injectif  $T\Sigma \hookrightarrow \varphi^*TX$  dont le quotient est appelé fibré normal à  $\Sigma$  dans  $X$  et noté  $N_{\Sigma/X}$ .

**Exercice II.13.** 1)  $\mathbb{C}P^1$  s'injecte dans  $\mathbb{C}P^2$  comme droite projective. Montrer que  $N_{\mathbb{C}P^1/\mathbb{C}P^2}$  est isomorphe à  $L_1$ .

2) Montrer que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{C}P^1$  et pour tout entier  $k$ ,  $L_{kx}$  est isomorphe à  $L_k$  sur  $\mathbb{C}P^1$ . C'est faux sur une courbe elliptique : si  $\Sigma$  est une courbe elliptique et  $x \neq y$  dans  $\Sigma$ , alors  $L_x$  et  $L_y$  ne sont pas isomorphes.

### 2.1.3 Faisceau des sections

**Définition II.14.** Soit  $p : E \rightarrow \Sigma$  un fibré vectoriel holomorphe et  $U \subset \Sigma$  un ouvert. On appelle section holomorphe de  $E$  définie sur  $U$  toute application holomorphe  $s : U \rightarrow E$  telle que  $p \circ s = id_U$ . Lorsque  $U = \Sigma$ ,  $s$  est appelée section globale.

**Exemple II.15.** Si  $p : \Sigma \times \mathbb{C}^k \rightarrow \Sigma$  est le fibré trivial de rang  $k$ , et  $U \subset \Sigma$  est un ouvert, alors une section  $s$  de  $p$  sur  $U$  est le graphe d'une fonction holomorphe  $U \rightarrow \mathbb{C}^k$ . Cette notion de section d'un fibré généralise donc la notion de fonction holomorphe sur une variété.

**Proposition II.16.** Soit  $p : \Sigma \times \mathbb{C}^k \rightarrow \Sigma$  le fibré trivial de rang  $k$  sur une surface de Riemann compacte connexe  $\Sigma$ . Alors les seules sections holomorphes globales de  $p$  sont les sections constantes.

*Démonstration.* Soit  $s$  une section holomorphe globale de  $p$ . C'est le graphe d'une fonction holomorphe  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^k$ . Alors sa norme atteint son maximum en un point  $x \in \Sigma$ . On écrit  $f = (f_1, \dots, f_k)$  et on peut supposer que  $f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0$ . Soit  $\varphi : \Delta \rightarrow \Sigma$  un paramétrage local de  $\Sigma$ , avec  $\varphi(0) = x$ , où  $\Delta$  désigne le disque unité de  $\mathbb{C}$ . Alors  $f_1 \circ \varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  atteint son maximum en 0. On en déduit que  $f_1$  est constante, puis que  $f$  est constante.  $\square$

**Remarque II.17.** Dans un fibré quelconque, la notion de section constante ou localement constante n'a pas de sens.

**Exercice II.18.** 1) Montrer que l'espace vectoriel des sections globales de  $L_k \rightarrow \mathbb{C}P^1$  est isomorphe à  $\{0\}$  si  $k < 0$  et à l'espace des polynômes homogènes de degré  $k$  à 2 variables complexes si  $k \geq 0$  (voir l'exercice 3 du TD6).

2) En déduire que  $L_k$  est isomorphe à  $L_m$  si et seulement si  $k = m$  pour  $k, m \in \mathbb{Z}$ .

3) Établir un résultat analogue sur  $\mathbb{C}P^n$ .

Pour tout fibré vectoriel holomorphe  $E$  sur une surface de Riemann  $\Sigma$  et tout ouvert  $U$  de  $\Sigma$ , on note  $\Gamma(U, E)$  l'espace vectoriel complexe des sections holomorphes de  $E$  définies sur  $U$  et  $\mathcal{O}_U$  l'anneau des fonctions holomorphes définies sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , de sorte que  $\Gamma(U, E)$  est un module sur l'anneau  $\mathcal{O}_U$ .

Ces  $\mathcal{O}_U$ -modules sont munis de morphismes de restriction. Pour tout ouvert  $V \subset U$ ,  $r_{U,V} : s \in \Gamma(U, E) \mapsto s|_V \in \Gamma(V, E)$ . Ils satisfont, pour tous ouverts  $W \subset V \subset U$ ,  $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$ . Par ailleurs,  $r_{U,U}$  est l'identité sur  $\Gamma(U, E)$ , et  $\Gamma(\emptyset, E) = \{0\}$ .

En outre, si  $U$  est recouvert par des ouverts  $(V_i)_{i \in I}$  et  $s \in \Gamma(U, E)$  est tel que pour tout  $i \in I$ ,  $r_{U,V_i}(s) = 0 \in \Gamma(V_i, E)$ , alors  $s = 0 \in \Gamma(U, E)$ . De même, si pour tout  $i \in I$ , on dispose de  $s_i \in \Gamma(V_i, E)$  tels que pour tous  $i$  et  $j$ ,  $r_{V_i, V_i \cap V_j}(s_i) = r_{V_j, V_i \cap V_j}(s_j)$ , alors il existe  $s \in \Gamma(U, E)$  tel que pour tout  $i$ ,  $r_{U,V_i}(s) = s_i$ .

Ces quelques propriétés très simples font de ces ensembles de sections de  $E$  ce que l'on appelle un faisceau. Lorsque le fibré  $E$  est le fibré trivial de rang 1, c-à-d  $E = \Sigma \times \mathbb{C}$ , alors le faisceau des sections est le faisceau  $\mathcal{O}_\Sigma$  des fonctions holomorphes définies sur des ouverts de  $\Sigma$ . En général,

**Définition II.19.** Un faisceau en groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $\Sigma$  est la donnée pour tout ouvert  $U$  de  $\Sigma$  d'un groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$  et pour tout ouvert  $V \subset U$  d'un morphisme de restriction  $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  qui vérifient les conditions suivantes :

1)  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ .



- 2)  $r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ .
- 3) Si  $W \subset V \subset U$ , alors  $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$ .
- 4) Si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $U$  par des ouverts et si  $s \in \mathcal{F}(U)$  est tel que pour tout  $i \in I$ ,  $r_{U,V_i}(s) = 0$ , alors  $s = 0$ .
- 5) Si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $U$  par des ouverts et  $(s_i \in \mathcal{F}(V_i))_{i \in I}$  est tel que pour tous  $i \neq j \in I$ ,  $r_{V_i, V_i \cap V_j}(s_i) = r_{V_j, V_i \cap V_j}(s_j)$ , alors il existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $r_{U,V_i}(s) = s_i$ .

## 2.2 Cohomologie de Čech

On pourra consulter [KOD] par exemple pour en connaître davantage sur ce paragraphe.

### 2.2.1 Cas d'un fibré holomorphe

Soit  $F$  un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts. Pour tout entier  $p$  positif ou nul, on note  $C^p(\mathcal{U}, F)$  l'ensemble des suites de sections holomorphes

$$s = (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} \in \prod_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, F),$$

vérifiant la condition combinatoire suivante :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}, s_{i_{\sigma(0)}, \dots, i_{\sigma(p)}} = \epsilon(\sigma) s_{i_0, \dots, i_p}.$$

C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et pour  $p$  entier positif ou nul, on introduit le morphisme  $d^p$  suivant que l'on appelle morphisme de cobord :

$$\begin{aligned} d^p : \quad C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, F) \\ s = (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} &\mapsto (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}})_{\substack{j_0, \dots, j_{p+1} \\ j_k \neq j_l}} \end{aligned}$$

où  $\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (s_{j_0, \dots, \hat{j}_i, \dots, j_{p+1}})|_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_{p+1}}}$  et  $\hat{j}_i$  signifie que l'on a enlevé l'indice  $j_i$ . On a ainsi une définition purement combinatoire des espaces  $C^p(\mathcal{U}, F)$  et du morphisme de cobord. On appelle espace des cochaînes de Čech de degré  $p$  l'espace  $C^p(\mathcal{U}, F)$ .

**Exercice II.20.** Vérifier que pour toute permutation  $\theta$  de  $\mathfrak{S}_{p+2}$ , on a l'égalité suivante :

$$\sigma_{j_{\theta(0)}, \dots, j_{\theta(p+1)}} = \epsilon(\theta) \sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}}.$$

On pourra vérifier l'égalité sur les transpositions  $(0, 1), \dots, (p, p+1)$ . Ainsi,  $d^p$  est bien définie.

On en déduit la suite  $0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{p-1}} C^p(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^p} \dots$  d'espaces vectoriels et de morphismes.

**Proposition II.21.** *Pour tout  $p \geq 0$ ,  $d^{p+1} \circ d^p = 0$ .*

*Démonstration.* La preuve est purement combinatoire. Soit  $s = (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} \in C^p(\mathcal{U}, F)$ .

Alors  $d^p s = (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}})_{\substack{j_0, \dots, j_{p+1} \\ j_k \neq j_l}} = \sigma$ ,  $d^{p+1} \circ d^p s = d^{p+1} \sigma = (\lambda_{n_0, \dots, n_{p+2}})_{\substack{n_0, \dots, n_{p+2} \\ n_k \neq n_l}} = \lambda$ .

Avec ces notations fixées, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{n_0, \dots, n_{p+2}} &= \sum_{a=0}^{p+2} (-1)^a (\sigma_{n_0, \dots, \widehat{n}_a, \dots, n_{p+2}})_{|U_{n_0} \cap \dots \cap U_{n_{p+2}}} \\ &= \sum_{a=0}^{p+2} (-1)^a \left( \sum_{b=0}^{a-1} (-1)^b (s_{n_0, \dots, \widehat{n}_b, \dots, \widehat{n}_a, \dots, n_{p+2}})_{|U_{n_0} \cap \dots \cap U_{n_{p+2}}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=a+1}^{p+2} (-1)^{b-1} (s_{n_0, \dots, \widehat{n}_a, \dots, \widehat{n}_b, \dots, n_{p+2}})_{|U_{n_0} \cap \dots \cap U_{n_{p+2}}} \right) \\ &= \sum_{0 \leq a < b \leq p+2} ((-1)^{a+b} + (-1)^{a+b-1}) (s_{n_0, \dots, \widehat{n}_a, \dots, \widehat{n}_b, \dots, n_{p+2}})_{|U_{n_0} \cap \dots \cap U_{n_{p+2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Définition II.22.** *Une suite de groupes abéliens  $C = (C^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  et de morphismes  $d^p : C^p \rightarrow C^{p+1}$  vérifiant  $d^{p+1} \circ d^p = 0$  est appelée complexe de cochaînes. Les groupes  $H^p(C) = \text{Ker}(d^p) / \text{Im}(d^{p-1})$  sont appelés les groupes de cohomologie du complexe. Un élément de  $Z^p(C) = \text{Ker}(d^p)$  est appelé un cocycle et un élément de  $B^p(C) = \text{Im}(d^{p-1})$  est appelé un cobord.*

Ainsi à tout fibré holomorphe  $F$  sur une surface de Riemann  $\Sigma$  (en fait sur une variété complexe  $\Sigma$ ) munie d'un recouvrement par des ouverts  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  est associé un complexe de Čech  $C^*(\mathcal{U}, F)$  qui possède des groupes de cohomologie de Čech notés  $\check{H}^*(\mathcal{U}, F)$ .

**Exemple II.23.** *Si  $\Sigma = \mathbb{C}P^1$ , et  $F = L_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on équipe  $\Sigma$  du recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$  donné par l'atlas standard. Alors,  $\Gamma(U_0, L_k) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \simeq \Gamma(U_1, L_k)$  et  $\Gamma(U_0 \cap U_1, L_k) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}$ . Soit  $s = (s_0, s_1) \in C^0(\mathcal{U}, L_k)$ . Les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  tout entier sont des séries entières, ainsi si on désigne par  $\varphi_i$  les cartes affines standard de  $\Sigma$  et par  $\Phi_i$  les trivialisations de  $L_k$  associées, on écrit*

$$\Phi_0 \circ s_0 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

et de même

$$\Phi_1 \circ s_1 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i.$$

Alors, si on change de cartes, on a

$$\Phi_0 \circ s_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^k \frac{b_i}{z^i}.$$

Enfin,  $d^0 s = (s_1)|_{U_0 \cap U_1} - (s_0)|_{U_0 \cap U_1}$ , ce qui se lit dans les cartes

$$\Phi_0 \circ d^0 s \circ \varphi_0^{-1}(z) = \sum_{i=-\infty}^k b_{k-i} z^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

- Ainsi, si  $k < 0$ ,  $\text{Ker}(d^0) = 0$  et  $\text{Coker}(d^0) \simeq \mathbb{C}_{|k|-2}[z]$ , où on note par abus  $\mathbb{C}_{-1}[z]$  l'espace vectoriel nul  $\{0\}$ . On a donc  $\check{H}^0(\mathcal{U}, L_k) = 0$  et  $\check{H}^1(\mathcal{U}, L_k) \simeq \mathbb{C}^{|k|-1}$ .
- Si  $k \geq 0$ , alors  $\text{Ker}(d^0) \simeq \mathbb{C}_k[z]$  et  $\text{Coker}(d^0) = 0$ , donc  $\check{H}^0(\mathcal{U}, L_k) \simeq \mathbb{C}^{k+1}$  et  $\check{H}^1(\mathcal{U}, L_k) = 0$ .

**Proposition II.24.** Soit  $F$  un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$  munie d'un recouvrement  $\mathcal{U}$ . Alors  $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) = \Gamma(\Sigma, F)$ .

*Démonstration.* On introduit le morphisme  $\epsilon : \Gamma(\Sigma, F) \mapsto C^0(\mathcal{U}, F)$  que l'on définit par  $\epsilon(s) = (s_i)_{i \in I}$  où  $s_i = s|_{U_i}$ . Alors  $d^0 \circ \epsilon = 0$ . En effet, si  $s \in \Gamma(\Sigma, F)$  est une section, alors  $d^0 \circ \epsilon(s) = (\sigma_{i_0, i_1})_{i_0 \neq i_1}$  avec  $\sigma_{i_0, i_1} = (s_{i_1})|_{U_0 \cap U_1} - (s_{i_0})|_{U_0 \cap U_1} = s|_{U_0 \cap U_1} - s|_{U_0 \cap U_1}$ , donc  $d^0 \circ \epsilon(s) = 0$ .

Ainsi,  $\epsilon$  est à valeurs dans  $\check{H}^0(\mathcal{U}, F)$ . Il ne reste qu'à montrer qu' $\epsilon$  est un isomorphisme. D'après la quatrième propriété des faisceaux donnée par la Définition II.19, si pour tout  $i \in I$ ,  $s_i = s|_{U_i} = 0$ , alors  $s = 0$ . Donc si  $\epsilon(s) = 0$ ,  $s = 0$ , d'où l'injectivité du morphisme  $\epsilon$ . D'autre part, d'après la cinquième propriété des faisceaux de la Définition II.19, si  $(s_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, F)$  est telle que pour tous  $i \neq j$ ,  $(s_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j)|_{U_i \cap U_j}$ , c-à-d  $(s_i)_{i \in I} \in Z^0(C)$ , alors il existe une section  $s$  telle que  $s|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i$ . Alors  $\epsilon(s) = (s_i)_{i \in I}$ , d'où la surjectivité du morphisme  $\epsilon$ .  $\square$

À ce stade, les groupes de cohomologie de Čech  $\check{H}^*(\mathcal{U}, F)$  dépendent du recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $\Sigma$ . On peut toutefois définir des groupes de cohomologie de Čech qui n'en dépendent pas en considérant les raffinements de recouvrement, notion que l'on définit à présent.

**Définition II.25.** On dit qu'un recouvrement  $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$  de la variété différentielle  $\Sigma$  est un raffinement du recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  lorsqu'il existe une application  $\varphi : J \rightarrow I$  appelée application de raffinement telle que pour tout  $j \in J$ ,  $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ . L'application de raffinement  $\varphi$  induit pour tout entier  $p$  positif ou nul un morphisme  $\varphi^p$  défini par

$$\begin{aligned} \varphi^p : \quad C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^p(\mathcal{V}, F) \\ (s_{i_0, \dots, i_p})_{\substack{i_0, \dots, i_p \\ i_k \neq i_l}} &\mapsto (\sigma_{j_0, \dots, j_p})_{\substack{j_0, \dots, j_p \\ j_k \neq j_l}} \end{aligned}$$

avec  $\sigma_{j_0, \dots, j_p} = (s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_p)})|_{V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_p}}$  si  $\forall k \neq l$ ,  $\varphi(j_k) \neq \varphi(j_l)$ , et  $\sigma_{j_0, \dots, j_p} = 0$  sinon.

**Lemme II.26.** Soit  $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$  un raffinement d'un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  de la surface  $\Sigma$ , et soit  $\varphi : J \rightarrow I$  une application de raffinement. Alors pour tout entier  $p$  positif ou nul, on a  $d^p \circ \varphi^p = \varphi^{p+1} \circ d^p$ , que l'on abrège en  $d^* \varphi^* = \varphi^* d^*$ .

Une telle famille de morphismes qui commutent avec le cobord  $d$  est appelé morphisme de complexes, ou application de chaînes.

*Démonstration.* Soit  $s = (s_{i_0, \dots, i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, F)$ , alors

$$\begin{aligned} d^p \circ \varphi^p(s) &= d^p((s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_p)})) \\ &= (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}}) \end{aligned}$$

avec  $\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_i)}, \dots, \varphi(j_{p+1})})|_{V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_{p+1}}}$ .

D'autre part, on a aussi  $\varphi^{p+1} \circ d^p(s) = \varphi^{p+1}(\sigma)$ , où  $\sigma = (\sigma_{i_0, \dots, i_{p+1}})$ , avec  $\sigma_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (s_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{p+1}})|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}}$ . Ainsi,

$$\varphi^{p+1} \circ d^p(s) = (\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}}) = d^p \circ \varphi^p(s).$$

En fait, les opérations combinatoire de raffinement et de suppression d'indice commutent.  $\square$

Une telle application de chaînes induit un morphisme en cohomologie  $\varphi^*$  de  $\check{H}^*(\mathcal{U}, F)$  dans  $\check{H}^*(\mathcal{V}, F)$ , car elle envoie les cocycles sur les cocycles et les cobords sur les cobords (ceci provient de la relation de commutation de  $\varphi$  avec  $d$ ). Enfin ce morphisme en cohomologie ne dépend pas du choix de l'application de raffinement  $\varphi$ . En effet si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux applications de raffinement, on pose

$$\begin{aligned} K : C^p(\mathcal{U}, F) &\rightarrow C^{p-1}(\mathcal{V}, F) \\ s = (s_{i_0, \dots, i_p}) &\mapsto (\sigma_{j_0, \dots, j_{p-1}}), \end{aligned}$$

avec  $\sigma_{j_0, \dots, j_{p-1}} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_{p-1})}$ .

**Lemme II.27.** Soit  $\mathcal{V}$  un raffinement d'un recouvrement  $\mathcal{U}$  d'une surface différentielle  $\Sigma$ , et  $\varphi$  et  $\psi$  deux applications de raffinement. Alors  $\psi^* - \varphi^* = d^* \circ K^* + K^* \circ d^*$ .

*Démonstration.* Soit  $s = (s_{i_0, \dots, i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, F)$ . Pour fixer les notations, soient  $d(s) = \sigma$ ,  $K(s) = z$ ,  $d(z) = \zeta$ ,  $K(\sigma) = \tau$ . Alors,

$$\sigma_{j_0, \dots, j_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{j_0, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_{p+1}},$$

et donc

$$\begin{aligned}\tau_{j_0, \dots, j_p} &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{k=0}^i (-1)^k s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_k)}, \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{k=i}^p (-1)^{k+1} s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \widehat{\psi(j_k)}, \dots, \psi(j_p)}.\end{aligned}$$

Dans la seconde somme apparaît le terme  $(-1)^{k+1}$  puisqu'on a doublé un indice lors du passage de  $\varphi$  à  $\psi$ . En isolant dans ces deux sommes les termes  $k = i$ , on obtient  $\sum_{i=0}^p s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_{i-1}), \psi(j_i), \dots, \psi(p)}$  et  $-\sum_{i=0}^p s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_{i+1}), \dots, \psi(p)}$ . En les sommant, on obtient une somme télescopique, et les seuls deux termes qui ne sont pas annulés sont  $s_{\psi(j_0), \dots, \psi(j_p)}$  et  $-s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_p)}$ , c'est-à-dire  $\psi(s)$  et  $-\varphi(s)$ . On a donc

$$\begin{aligned}K \circ d(s) &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_k)}, \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sum_{k=i}^p (-1)^{k+1} s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \widehat{\psi(j_k)}, \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \psi(s) - \varphi(s).\end{aligned}$$

D'autre part,  $z_{j_0, \dots, j_{p-1}} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_{p-1})}$ . Donc si on applique  $d^*$ , on obtient

$$\begin{aligned}\zeta_{j_0, \dots, j_p} &= \sum_{k=1}^p (-1)^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_{\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \widehat{\psi(j_k)}, \dots, \psi(j_p)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \sum_{i=k+1}^p (-1)^{i-1} s_{\varphi(j_0), \dots, \widehat{\varphi(j_k)}, \dots, \varphi(j_i), \psi(j_i), \dots, \psi(j_p)}\end{aligned}$$

Ainsi on sommant les deux expressions obtenues, il ne reste que  $\psi(s) - \varphi(s)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Une telle famille de morphismes  $K^*$  satisfaisant les conclusions du Lemme II.27 est appelée homotopie entre les applications de chaînes  $\varphi^*$  et  $\psi^*$ . Deux applications de chaînes homotopes induisent le même morphisme en cohomologie.

On conclut à présent tout le travail qui précède. Si  $\mathcal{V}$  est un raffinement d'un recouvrement  $\mathcal{U}$ , alors les applications de raffinement induisent un morphisme unique, canonique donc, de  $\check{H}^*(\mathcal{U}, F)$  dans  $\check{H}^*(\mathcal{V}, F)$ . Deux recouvrements de  $\Sigma$  possèdent toujours un raffinement commun. On définit la cohomologie de Čech de  $\Sigma$  à valeurs dans le fibré  $F$  comme la limite directe sur les recouvrements de  $\Sigma$  des cohomologies de Čech associées à ces recouvrements :  $\check{H}^*(\Sigma, F) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^*(\mathcal{U}, F)$ . Par définition donc,

$\check{H}^*(\Sigma, F) = (\bigsqcup_{\mathcal{U}} \check{H}^*(\mathcal{U}, F)) / \sim$  avec  $s \in \check{H}^*(\mathcal{U}, F) \sim s' \in \check{H}^*(\mathcal{U}', F)$  s'il existe un raffinement commun  $\mathcal{V}$  à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$  tel que  $\varphi_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(s) = \varphi_{\mathcal{U}', \mathcal{V}}(s')$ .

Cette forme explicite n'est pas très maniable et on peut en fait souvent calculer la cohomologie de Čech à l'aide d'un recouvrement bien choisi.

**Définition II.28.** Un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  de  $\Sigma$  est dit *acyclique* pour le fibré  $F$  lorsque pour tous entier  $p > 0$  et  $q \geq 0$ , et pour tous indices  $i_0, \dots, i_q$  avec  $i_k \neq i_l$ , on a  $\check{H}^p(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, F) = 0$ .

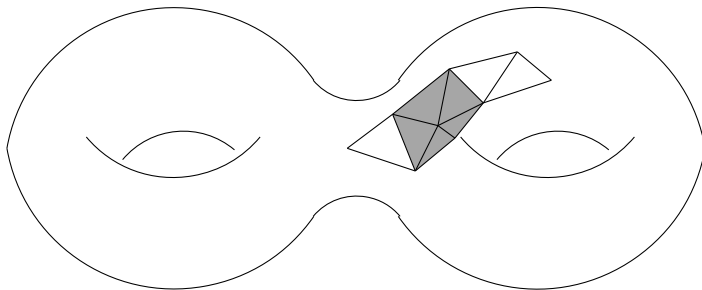
**Théorème II.29** (Leray). Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement de la surface de Riemann  $\Sigma$  acyclique pour le fibré  $F$ . Alors  $\check{H}^*(\mathcal{U}, F) = \check{H}^*(\Sigma, F)$ .

Le Théorème II.29 est admis. On termine ce paragraphe par la proposition suivante :

**Proposition II.30.** Soit  $F$  un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . Alors pour tout  $p > 2$ ,  $\check{H}^p(\Sigma, F) = 0$ .

En fait ce résultat vaut pour tout faisceau, pas seulement celui des sections holomorphes d'un fibré. De plus, sous les hypothèses de la Proposition II.30, on a même  $\check{H}^2(\Sigma, F) = 0$ , voir le Théorème II.53.

*Démonstration.* Équipons  $\Sigma$  d'une triangulation (voir la def I.38). Pour chaque sommet  $s$  de la triangulation, on associe l'ouvert  $U_s$  formé de l'intérieur de la réunion des triangles qui contiennent  $s$  comme sommet, comme le suggère la figure ci-dessous où  $U_s$  est la zone grisée,



On en déduit un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_s)_{s \in S}$  de  $\Sigma$ . Or, tout sommet de la triangulation est contenu dans un unique ouvert du recouvrement, tout point intérieur à une arête est contenu dans exactement deux ouverts du recouvrement et tout point intérieur à un triangle dans exactement trois ouverts, associés aux trois sommets du triangle. On en déduit que pour tout  $p > 2$ ,  $C^p(\mathcal{U}, F) = 0$ , de sorte que  $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) = 0$ . Comme tout recouvrement de  $\Sigma$  possède un raffinement de ce type, associé à une triangulation suffisamment fine de  $\Sigma$ , on en déduit pour tout  $p > 2$ ,  $\check{H}^p(\Sigma, F) = 0$ .  $\square$

## 2.2.2 Le cas du faisceau constant

### 2.2.2.1 Définition

Notons  $\underline{\mathbb{C}}$  (respectivement  $\underline{\mathbb{Z}}$ , respectivement  $\underline{\mathbb{R}}$ ) le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans  $\mathbb{C}$  (respectivement dans  $\mathbb{Z}$ , respectivement dans  $\mathbb{R}$ ). Pour tout ouvert  $U$  de  $\Sigma$  on note  $\Gamma(U, \underline{\mathbb{C}}) = \{\text{fonctions de } U \text{ dans } \mathbb{C} \text{ localement constantes}\}$  (donc constantes si  $U$  est connexe).

**Exercice II.31.** 1) Vérifier que  $\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{R}}$  satisfont bien les cinq axiomes d'un faisceau donnés par la Définition II.19.

2) Vérifier que ce ne serait pas le cas si on prenait les fonctions constantes et non pas localement constantes.

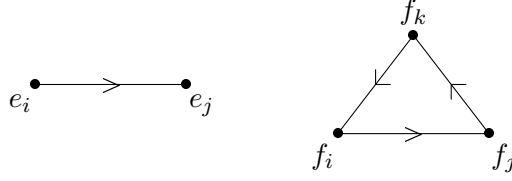
On définit comme au §2.2.1 les groupes de cohomologies de Čech  $\check{H}^*(\Sigma, \underline{\mathbb{C}})$  à valeur dans le faisceau  $\underline{\mathbb{C}}$  (la même définition s'applique à tout faisceau sur  $\Sigma$ ). D'après le théorème de Leray (Théorème II.29), ces groupes de cohomologie peuvent se calculer sur un recouvrement  $\mathcal{U}$  dont toutes les intersections d'ouverts sont contractiles, comme par exemple ceux associés à une triangulation, apparus au cours de la preuve de la Proposition II.30. Un tel recouvrement  $\mathcal{U}$  se trouve en effet être acyclique pour le faisceau constant, au sens de la Définition II.28. En fait, les ouverts contractiles de  $\Sigma$  sont difféomorphes au disque unité ouvert  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$ , de sorte qu'il suffit de vérifier que pour tout  $p$  strictement positif,  $\check{H}^p(\Delta, \underline{\mathbb{C}}) = 0$ . (Attention ! Un espace contractile de dimension 3 n'est pas nécessairement difféomorphe à la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ ). Comme  $\Sigma$  est fermée (compacte sans bord), on en déduit en particulier que  $\check{H}^*(\Sigma, \underline{\mathbb{C}})$  est de dimension finie.

### 2.2.2.2 La cohomologie simpliciale

Soit  $\Sigma$  une surface différentielle que l'on munit d'une triangulation  $\tau$ . Notons  $(e_i)_{i \in I}$  les sommets de la triangulation. Chaque arête de  $\tau$  dont les sommets adjacents sont  $e_i, e_j$ , avec  $i \neq j$  est notée  $[e_i, e_j]$  et l'ordre induit une orientation de l'arête. On convient que  $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$ . De même, chaque triangle de sommets  $e_i, e_j, e_k$ , avec  $i \neq j \neq k \neq i$ , est noté  $[e_i, e_j, e_k]$ , et on convient que pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ ,  $[e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}, e_{\sigma(k)}] = \epsilon(\sigma)[e_i, e_j, e_k]$ . On appelle simplexes les sommets, les arêtes et les triangles de la triangulation. Pour tout entier  $p$  compris entre 0 et 2, et quels que soient les indices  $i_0, \dots, i_p$ , on en déduit une expression du bord des simplexes

$$\partial_p[e_{i_0}, \dots, e_{i_p}] = \sum_{j=0}^p (-1)^j [e_{i_0}, \dots, \hat{e}_{i_j}, \dots, e_{i_p}].$$

Attention, on a défini un bord, et non un cobord comme précédemment, c'est-à-dire qu'on perd une dimension plutôt que d'en gagner une en appliquant  $\partial$ . Dans la figure suivante, on voit que les changements de signe dans la définition de  $\partial$  proviennent de l'orientation induite sur le bord des simplexes.



On a alors  $\partial_1([e_i, e_j]) = e_j - e_i$  et  $\partial_2([f_i, f_j, f_k]) = [f_i, f_j] + [f_j, f_k] - [f_i, f_k]$  que l'on peut réécrire  $[f_i, f_j] + [f_j, f_k] + [f_k, f_i]$ .

Pour tout entier  $p$  compris entre 0 et 2, on pose  $C_p(\tau, \mathbb{C}) = \{ \sum_{\text{finie}} a_i \sigma_i, a_i \in \mathbb{C}, \sigma_i \in \tau \}$  où  $\sigma_i$  est un simplexe de  $\tau$ . On note aussi  $C^p(\tau, \mathbb{C}) = \text{Hom}(C_p(\tau, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Les éléments de  $C_p(\tau, \mathbb{C})$  (respectivement  $C^p(\tau, \mathbb{C})$ ) sont appelés  $p$ -chaînes (respectivement  $p$ -cochaînes) simpliciales. Ces groupes abéliens (ou  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels) sont munis de morphismes de bord et de cobord :

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(\tau, \mathbb{C}) &\rightarrow C_{p-1}(\tau, \mathbb{C}) \\ \sum_{\text{finie}} a_i \sigma_i &\mapsto \sum_{\text{finie}} a_i \partial_p(\sigma_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^p : C^p(\tau, \mathbb{C}) &\rightarrow C^{p+1}(\tau, \mathbb{C}) \\ \sum_{\text{finie}} a_i \sigma_i^* &\mapsto \sum_{\text{finie}} a_i (\sigma_i^* \circ \partial_{p+1}). \end{aligned}$$

La notation  $\sigma_i^*$  désigne l'application duale, c-à-d la forme linéaire qui au simplexe  $\sigma_i$  associe 1 et aux autres simplexes associe 0. En fait avec ces notations,  $d^p = {}^t(\partial_{p+1})$ .

**Lemme II.32.** *Pour toute triangulation  $\tau$  sur une surface différentielle  $\Sigma$  et pour tout  $p \geq 0$ ,  $d^{p+1} \circ d^p = 0$  et  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ .*

*Démonstration.* C'est la même démonstration combinatoire que la démonstration de la Proposition II.21 puisque la définition combinatoire est analogue.  $\square$

On en déduit des complexes

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0(\tau, \mathbb{C}) \xleftarrow{\partial_1} C_1(\tau, \mathbb{C}) \xleftarrow{\partial_2} C_2(\tau, \mathbb{C}) \leftarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow C^0(\tau, \mathbb{C}) \xrightarrow{d^0} C^1(\tau, \mathbb{C}) \xrightarrow{d^1} C^2(\tau, \mathbb{C}) \rightarrow 0$$

dont les groupes d'homologie sont notés  $H_*(\tau, \mathbb{C})$  et  $H^*(\tau, \mathbb{C})$  respectivement et appelés homologie et cohomologie simpliciale de  $\tau$ .

**Théorème II.33.** *Pour toute surface différentielle  $\Sigma$ , les groupes d'homologie et de cohomologie simpliciale ne dépendent pas du choix de la triangulation. On note ces groupes  $H_*(\Sigma, \mathbb{C})$  et  $H^*(\Sigma, \mathbb{C})$  plutôt que  $H_*(\tau, \mathbb{C})$  et  $H^*(\tau, \mathbb{C})$ . De plus,  $H^*(\Sigma, \mathbb{C}) \simeq \check{H}^*(\Sigma, \mathbb{C})$ .*



*Démonstration.* On munit  $\Sigma$  d'une triangulation et on considère le recouvrement  $\mathcal{U}$  associé comme dans la démonstration de la Proposition II.30. Ce recouvrement se trouve être acyclique au sens de la Définition II.28, de sorte que d'après le théorème de Leray (Théorème II.29),  $\check{H}(\Sigma, \mathbb{C}) = \check{H}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ . Or, toute intersection de  $(p+1)$  ouverts de ce recouvrement est soit vide, soit contient un unique  $p$ -simplexe, pour  $0 \leq p \leq 2$ , et toute fonction localement constante sur cette intersection est constante. En associant cette constante au  $p$ -simplexe en question, on en déduit un isomorphisme tautologique  $\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \rightarrow C^*(\tau, \mathbb{C})$  qui induit un isomorphisme en cohomologie, d'où le résultat.  $\square$

**Exercice II.34.** 1) Calculer l'homologie et la cohomologie simpliciale de  $\mathbb{R}^2, \Delta, \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{R}P^2$ , à coefficients dans  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

2) Montrer que l'homologie et la cohomologie simpliciale sont invariantes par subdivision barycentriques.

## 2.3 Groupe de Picard

### 2.3.1 Opérations sur les fibrés vectoriels

Soient  $\Pi_1 : F_1 \rightarrow \Sigma$  et  $\Pi_2 : F_2 \rightarrow \Sigma$  deux fibrés vectoriels holomorphes sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . On note :

- \*  $F_1 \oplus F_2 = \{(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2, \Pi_1(v_1) = \Pi_2(v_2)\}$ . La fibre en chaque  $x \in \Sigma$  est la somme directe  $\Pi_1^{-1}(x) \oplus \Pi_2^{-1}(x)$  des fibres de  $F_1$  et  $F_2$  au-dessus de  $x$ .
- \*  $\det(F_1)$  le fibré dont la fibre en chaque  $x \in \Sigma$  est  $\Lambda^{k_1}(\Pi_1^{-1}(x))$  où  $k_1$  est le rang de  $F_1$ .
- \*  $F_1^*$  le fibré dont la fibre en chaque  $x \in \Sigma$  est le dual  $(\Pi_1^{-1}(x))^*$  de  $\Pi_1^{-1}(x)$ .
- \*  $F_1 \otimes F_2$  le fibré dont la fibre en chaque  $x \in \Sigma$  est le produit tensoriel  $\Pi_1^{-1}(x) \otimes \Pi_2^{-1}(x)$ .

Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $\Sigma$  suffisamment fin pour que  $F_1$  et  $F_2$  soient trivialisables sur ces ouverts. On note  $\Phi_i : F_1|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^{k_1}$  et  $\Psi_i : F_2|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^{k_2}$  des trivialisations locales de ces fibrés avec les changements de trivialisations

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} &= \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{k_1} &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{k_1} \\ & & (x, v_1) &\mapsto (x, g_{i,j}(x)(v_1)) \\ \Psi_{i,j} &= \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{k_2} &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{k_2} \\ & & (x, v_2) &\mapsto (x, h_{i,j}(x)(v_2)) \end{aligned}$$

où  $g_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow Gl_{k_1}(\mathbb{C})$  et  $h_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow Gl_{k_2}(\mathbb{C})$  sont holomorphes et telles que  $g_{i,k} = g_{j,k}g_{i,j}$  et  $h_{i,k} = h_{j,k}h_{i,j}$ . Alors :

- \*  $F_1 \oplus F_2$  est défini par le changement de trivialisations

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times (\mathbb{C}^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2}) &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times (\mathbb{C}^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2}) \\ (x, (v_1, v_2)) &\mapsto \left( x, \begin{pmatrix} g_{i,j}(x) & 0 \\ 0 & h_{i,j}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

\*  $F_1 \otimes F_2$  est défini par le changement de trivialisations

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times (\mathbb{C}^{k_1} \otimes \mathbb{C}^{k_2}) &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times (\mathbb{C}^{k_1} \otimes \mathbb{C}^{k_2}) \\ (x, (v_1, v_2)) &\mapsto (x, g_{i,j}(x)(v_1) \otimes h_{i,j}(x)(v_2)). \end{aligned}$$

\*  $\det(F_1)$  est défini par le changement de trivialisations

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ (x, v) &\mapsto (x, \det(g_{i,j}(x))v). \end{aligned}$$

\*  $F_1^*$  est défini par le changement de trivialisations

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{k_1} &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{k_1} \\ (x, v) &\mapsto (x, {}^t(g_{i,j}(x)^{-1})v). \end{aligned}$$

**Exemple II.35.** Pour tous  $k, l \in \mathbb{Z}$ , les fibrés  $L_k$  et  $L_{-k}$  sur  $\mathbb{C}P^1$  sont duaux et on a l'isomorphisme  $L_k \otimes L_l \simeq L_{k+l}$ .

### 2.3.2 Groupe de Picard

**Proposition II.36.** L'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites holomorphes sur une surface de Riemann  $\Sigma$ , muni du produit tensoriel de fibrés, forme un groupe abélien.

*Démonstration.* Si  $M$  et  $N$  sont deux tels fibrés, alors  $M \otimes N$  est un fibré en droites dont la classe d'isomorphisme ne dépend que de celles de  $M$  et  $N$ . Le fibré trivial est élément neutre pour cette loi de composition et le fibré dual  $L^*$  est l'inverse de  $L$ . De plus, la loi  $\otimes$  est associative et commutative.  $\square$

**Définition II.37.** On appelle groupe de Picard d'une surface de Riemann  $\Sigma$  et on note  $Pic(\Sigma)$ , le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur  $\Sigma$ , donné par la Proposition II.36.

**Proposition II.38.** Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann. Les groupes  $Pic(\Sigma)$  et  $\check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* À tout fibré en droites  $L$ , on va associer un 1-cocycle  $g \in \check{Z}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  dont on dira qu'il définit  $L$ . On montrera alors que  $[L] \in Pic(\Sigma) \mapsto [g] \in \check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  est un isomorphisme.

Soit  $L$  un fibré en droites holomorphe sur  $\Sigma$ . Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts qui trivialisent  $L$ . Soit  $\Phi_i : L|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$  des trivialisations locales et soient

$$\Phi_{i,j} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ (x, v_1) &\mapsto (x, g_{i,j}(x)(v_1)) \end{aligned}$$

les changements de trivialisations. Ces changements de trivialisations fournissent en particulier pour tous  $i \neq j \in I$  des fonctions  $g_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$  telles que  $g_{j,i} = g_{i,j}^{-1}$ .

Notons  $\mathcal{O}_\Sigma^*$  le faisceau des fonctions holomorphes de  $\Sigma$  qui ne s'annulent pas, munies de la structure de groupe multiplicatif. La collection  $g = (g_{i,j})_{i \neq j \in I}$  définit une 1-cochaîne de Čech  $g \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ . De plus, si  $i \neq j \neq k \neq i \in I$ , on a  $g_{i,k}(x) = g_{j,k}(x)g_{i,j}(x)$ , ce que l'on réécrit  $g_{j,k}g_{i,k}^{-1}g_{i,j} = 1$ , de sorte que  $d^1g = 1$ , l'élément neutre de  $\check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ . Ainsi  $g$  est un 1-cocycle de Čech. Soit à présent  $M$  un fibré en droites holomorphe sur  $\Sigma$  isomorphe à  $L$  et  $f : M \rightarrow L$  un isomorphisme. Quitte à raffiner  $\mathcal{U}$ , on peut supposer qu'il trivialise  $L$  et  $M$  à la fois. On note  $h = (h_{i,j})_{i \neq j \in I}$  le 1-cocycle fourni par la trivialisation de  $M$ . Dans chaque trivialisation  $U_i \times \mathbb{C}$ , l'isomorphisme  $f$  est donné par une collection de morphismes

$$F_i : U_i \times \mathbb{C} \rightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ (x, v) \mapsto (x, f_i(x)v)$$

où  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$  est holomorphe et telle que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi_{i,j}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ \downarrow F_i & & F_j \downarrow \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\Phi_{i,j}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}. \end{array}$$

On en déduit la condition de recollement

$$\forall i \neq j \in I, \forall x \in U_i \cap U_j, g_{i,j}(x)f_i(x) = f_j(x)h_{i,j}(x),$$

condition que l'on réécrit  $g_{i,j} = h_{i,j}f_jf_i^{-1}$ .

Ainsi,  $g = h \cdot d^0f \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  où  $f = (f_i)_{i \in I} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ , de sorte que les classes de cohomologie de  $g$  et  $h$  sont les mêmes dans  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  et a fortiori dans  $\check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ .

Soit alors  $\theta : Pic(\Sigma) \rightarrow \check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  l'application ainsi définie. C'est un morphisme de groupes d'après les propriétés énoncées au §2.3.1. Ce morphisme est injectif. En effet, si  $[g] = 1 \in \check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ , il existe par définition un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $\Sigma$  tel que  $g = 1 \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ . Il existe alors  $f \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$  telle que  $g = d^0f$ . Cette 0-cochaîne  $f$  définit alors un isomorphisme entre le fibré  $L$  que définit  $g$  et le fibré trivial. Enfin  $\theta$  est surjectif puisque pour tout  $[g] \in \check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ , il existe un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $\Sigma$  tel que  $[g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ . Cette classe de cohomologie est représentée par un 1-cocycle  $g = (g_{i,j})_{i \neq j \in I} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\Sigma^*)$ . Ce 1-cocycle permet de définir un fibré en droites holomorphe  $L$  en recollant des fibrés triviaux  $U_i \times \mathbb{C}$  par des changements de trivialisation

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \rightarrow & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ (x, v_1) & \mapsto & (x, g_{i,j}(x)(v_1)). \end{array}$$

Comme  $g_{i,k} = g_{j,k}g_{i,j}$  puisque  $d^1g = 1$ , on obtient bien un fibré en droites holomorphe.  $\square$

## 2.4 Diviseurs

### 2.4.1 Degré et diviseurs de sections

Soit  $L$  un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . Soit  $s$  une section méromorphe non nulle de  $L$ . Pour tout  $z \in \Sigma$ , on note  $ord_z(s)$  l'ordre d'annulation

de  $s$  au point  $z$ , de sorte que  $ord_z(s) > 0$  si et seulement si  $s$  s'annule en  $z$  et  $ord_z(s) < 0$  si et seulement si  $s$  admet un pôle en  $z$ . Cet ordre est bien défini puisque dans une trivialisatation locale  $s$  se lit comme une fonction méromorphe et l'ordre d'annulation de cette fonction méromorphe ne dépend pas du choix de la trivialisatation.

**Définition II.39.** On appelle *diviseur de la section méromorphe non nulle  $s$  du fibré en droites holomorphe  $L$  sur  $\Sigma$*  la somme formelle  $\sum_{z \in \Sigma} (ord_z(s)) \cdot z$ , que l'on note  $div(s)$ .

Lorsque  $\Sigma$  est compacte, on appelle *degré de ce diviseur* l'entier  $\sum_{z \in \Sigma} (ord_z(s))$  que l'on note  $deg(div(s))$ . On convient que  $div(0) = 0$  et  $deg(div(0)) = 0$ .

Lorsque  $L$  est le fibré trivial sur  $\Sigma$  compacte,  $s$  est une fonction méromorphe et d'après la Proposition I.24,  $deg(div(s)) = 0$ .

**Définition II.40.** Le *diviseur d'une fonction méromorphe sur  $\Sigma$*  est appelé *diviseur principal*.

**Proposition II.41.** Soient  $s$  et  $s'$  deux sections méromorphes non nulles d'un fibré en droites holomorphe  $L$  sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . Alors  $div(s) - div(s')$  est un diviseur principal. En particulier, si  $\Sigma$  est compacte,  $deg(div(s)) = deg(div(s'))$

Lorsque  $L = T^*\Sigma$ ,  $s$  et  $s'$  sont des 1-formes méromorphes sur  $\Sigma$  et l'égalité  $deg(div(s)) = deg(div(s'))$  suit de la Proposition I.33.

*Démonstration.* On procède comme dans la démonstration de la Proposition I.33. Il existe une fonction méromorphe sur  $\Sigma$  telle que  $s = fs'$ . En effet, si  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts sur lesquels  $L$  est trivialisable et  $g = (g_{i,j})_{i \neq j \in I}$  le 1-cocycle de Čech associé à un choix de trivialisatation sur chaque ouvert, alors, pour tout  $i \in I$ ,  $s$  se lit dans la trivialisatation de  $L|_{U_i}$  comme une fonction méromorphe  $s_i$  sur  $U_i$  et  $s'$  comme une fonction méromorphe  $s'_i$  telles que  $s_j = g_{i,j}s_i$  et  $s'_j = g_{i,j}s'_i$  sur l'intersection  $U_i \cap U_j$ . En posant  $f_i = \frac{s_i}{s'_i}$ , on obtient des fonctions méromorphes  $f_i$  qui vérifient, pour tous  $i \neq j \in I$ ,  $(f_i)|_{U_i \cap U_j} = (f_j)|_{U_i \cap U_j}$ , de sorte qu'elles se recollent en une fonction méromorphe globale  $f$  sur  $\Sigma$  telle que  $s = fs'$ . Or pour tout  $z \in \Sigma$ ,  $ord_z(fs') = ord_z(f) + ord_z(s')$ . On en déduit donc que  $div(s) = div(f) + div(s')$ , puisque le diviseur  $div(s) - div(s')$  est principal au sens de la Définition II.40. Lorsque  $\Sigma$  est compacte, il suit de la Proposition I.24 que  $deg(div(f)) = 0$ , d'où  $deg(div(s)) = deg(div(s'))$ .  $\square$

**Définition II.42.** On appelle *degré du fibré en droites holomorphe  $L$  sur une surface de Riemann compacte  $\Sigma$*  le *degré commun de ses sections méromorphes non nulles*. Il est noté  $deg(L)$ .

**Exemple II.43.** On a  $deg(T^*\Sigma) = -\chi(\Sigma)$  d'après la Définition I.34. Le degré du fibré trivial est nul.

**Proposition II.44.** Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte. Alors l'application *degré*  $deg : L \in Pic(\Sigma) \mapsto deg(L) \in \mathbb{Z}$  est un morphisme de groupes. En particulier, pour tout fibré en droites holomorphe  $L$  sur  $\Sigma$ ,  $deg(L^*) = -deg(L)$ .

On en déduit que  $\deg(T\Sigma) = \chi(\Sigma)$

*Démonstration.* Si  $L$  et  $L'$  sont deux fibrés en droites isomorphes, alors  $\deg(L) = \deg(L')$ , de sorte que  $\deg$  passe bien au quotient en une application définie sur  $\text{Pic}(\Sigma)$ . Si  $L$  et  $L'$  sont deux fibrés en droites holomorphes sur  $\Sigma$  et  $s$  et  $s'$  des sections méromorphes de ces fibrés, alors  $s \otimes s'$  est une section méromorphe de  $L \otimes L'$ . Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts sur lesquels  $L$  et  $L'$  sont trivialisables. Soient  $g$  et  $g'$  les 1-cocycles de Čech associés à des trivialisations locales. Alors, pour tout  $i \in I$ ,  $s$  se lit dans la trivialisations de  $L$  sur  $U_i$  comme une fonction méromorphe  $s_i$  et  $s'$  comme une fonction méromorphe  $s'_i$ . Par suite  $s \otimes s'$  se lit comme la fonction méromorphe  $s_i s'_i$  et de plus pour tous  $i \neq j$ ,  $s_j = g_{i,j} s_i$ ,  $s'_j = g'_{i,j} s'_i$ , donc  $s_j s'_j = g_{i,j} g'_{i,j} s_i s'_i$ . Ainsi,  $\text{div}(s \otimes s') = \text{div}(s) + \text{div}(s')$  et  $\deg(\text{div}(s \otimes s')) = \deg(\text{div}(s)) + \deg(\text{div}(s'))$ . On en déduit que  $\deg(L \otimes L') = \deg(L) + \deg(L')$ . En particulier, en notant  $L_0$  le fibré trivial sur  $\Sigma$ , on a  $\deg(L_0) = \deg(L \otimes L^*) = \deg(L) + \deg(L^*)$ .

En fait, si  $s$  est une section méromorphe de  $L$ ,  $\frac{1}{s}$  s'interprète comme une section méromorphe de  $L^*$ , c'est le recollement des fonctions  $\frac{1}{s_i}$  sur  $U_i$ . D'après ce qui précède,  $s \cdot \frac{1}{s} = 1$ , section du fibré trivial.  $\square$

**Remarque II.45.** On n'a pas utilisé le fait que  $\Sigma$  était compacte dans la preuve de la Proposition II.44 pour établir l'égalité  $\text{div}(s \otimes s') = \text{div}(s) + \text{div}(s')$ .

**Proposition II.46.** Soit  $s$  (respectivement  $s'$ ) une section méromorphe non nulle d'un fibré en droite  $L$  (respectivement  $L'$ ) sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . Si  $\text{div}(s) = \text{div}(s')$  alors  $L$  et  $L'$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Soit  $s^* = \frac{1}{s}$  la section méromorphe de  $L^*$  qui satisfait  $s^* \otimes s = 1$ , la section constante du fibré trivial. Alors  $\text{div}(s^*) = -\text{div}(s)$  et par suite, d'après l'égalité de la remarque II.45,  $\text{div}(s^* \otimes s') = \text{div}(s^*) + \text{div}(s') = 0$  par hypothèse. Donc  $s^* \otimes s'$  est une section holomorphe du fibré  $L^* \otimes L'$  qui ne s'annule pas. Cette section trivialisé le fibré  $L^* \otimes L'$  puisque l'application

$$\begin{aligned} \Sigma \times \mathbb{C} &\rightarrow L^* \otimes L' \\ (x, v) &\mapsto (x, s^* \otimes s'(x)v) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de fibrés. Ainsi  $[L'] = [L^*]^{-1} = [L]$  dans  $\text{Pic}(\Sigma)$  par unicité de l'inverse dans un groupe, de sorte que  $L$  et  $L'$  sont isomorphes.  $\square$

**Exercice II.47.** Montrer que  $\deg : \text{Pic}(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  est un isomorphisme.

#### 2.4.2 Fibré associé à un diviseur

Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann.

**Définition II.48.** On appelle *diviseur* de  $\Sigma$  toute fonction de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{Z}$  nulle sauf en un nombre discret de points, donc fini si  $\Sigma$  est compacte. Un tel diviseur est noté  $\sum_{z \in \Sigma} a_z \cdot z$ , avec  $a_z \in \mathbb{Z}$ . L'ensemble des diviseurs de  $\Sigma$  forme un groupe abélien noté  $\text{Div}(\Sigma)$ . L'ensemble des diviseurs principaux de  $\Sigma$  forme un sous-groupe (distingué) de  $\text{Div}(\Sigma)$ .

Soit  $D = \sum_{z \in \Sigma} a_z \cdot z$  un diviseur de  $\Sigma$  et soit  $(z_i)_{i \in I}$  l'ensemble discret des points de  $\Sigma$  en lesquels  $a_z \neq 0$ . Pour tout  $i \in I$ , on choisit un couple  $(U_i, g_i)$  tel que  $U_i$  est un voisinage de  $z_i$  dans  $\Sigma$  et  $g_i : U_i \dashrightarrow \mathbb{C}$  est une fonction méromorphe sur  $U_i$  telle que  $\text{div}(g_i) = a_{z_i} \cdot z_i$ . Par exemple,  $U_i$  est une carte locale et lue dans cette carte,  $g_i$  est de la forme  $z \mapsto z^{a_{z_i}}$ . On suppose de plus que ces ouverts  $U_i$  sont disjoints. On pose alors  $U_0 = \Sigma \setminus \left( \bigcup_{i \in I} \{z_i\} \right)$  pour obtenir un recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_0, U_i, i \in I\}$  de  $\Sigma$  par des ouverts. On définit le fibré en droites holomorphe  $L_D$  sur  $\Sigma$  en recollant les fibrés triviaux  $U_0 \times \mathbb{C}$  et  $U_i \times \mathbb{C}$  à l'aide des applications de recollement

$$\begin{aligned} \Phi_{0,i} : (U_0 \cap U_i) \times \mathbb{C} &\rightarrow (U_i \setminus \{z_i\}) \times \mathbb{C} \\ (z, v) &\mapsto (z, g_i(z)v) \end{aligned}$$

La section constante 1 de  $U_0 \times \mathbb{C} = (L_D)|_{U_0}$  se prolonge alors en une section méromorphe  $s_D$  sur  $L_D$  qui se lit dans les trivialisations au-dessus de  $U_i$  comme la fonction méromorphe  $g_i$ . En particulier,  $\text{div}(s_D) = \sum_{i \in I} \text{div}(g_i) = D$ . D'après la Proposition II.46, la classe d'isomorphisme de  $L_D$  ne dépend pas du choix des couples  $(U_i, g_i)_{i \in I}$ .

**Proposition II.49.** *Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann. L'application*

$$\begin{aligned} \text{Div}(\Sigma) &\rightarrow \text{Pic}(\Sigma) \\ D &\mapsto [L_D] \end{aligned}$$

*est un morphisme de groupes surjectif de noyau le sous-groupe des diviseurs principaux.*

*Démonstration.* Soit  $[L] \in \text{Pic}(\Sigma)$  et  $s$  une section méromorphe non nulle du fibré  $L$  (on admet l'existence d'une telle section, voir le Théorème II.56, ou sinon on se contente de montrer que l'image du morphisme est le sous-groupe du groupe de Picard des fibrés qui possèdent une section méromorphe non nulle).

D'après la Proposition II.46,  $L$  est isomorphe au fibré  $L_{\text{div}(s)}$  de sorte que  $[L]$  appartient à l'image de l'application. Par ailleurs, c'est un morphisme de groupes puisque  $\text{div}(s_D \otimes s_{D'}) = \text{div}(s_D) + \text{div}(s_{D'}) = D + D'$ . Enfin, si  $D$  est dans le noyau de ce morphisme, c'est le diviseur d'une fonction méromorphe  $s_D$ , section méromorphe du fibré trivial.  $\square$

**Exercice II.50.** 1) *Soit  $\Sigma = \mathbb{C}/\Lambda$  et  $\text{Div}_0(\Sigma)$  le sous-groupe des diviseurs de degré 0. On définit l'application d'Abel*

$$\begin{aligned} A : \text{Div}_0(\Sigma) &\rightarrow \Sigma = \mathbb{C}/\Lambda \\ \sum_{z \in \Sigma} a_z \cdot z &\mapsto \sum_{z \in \Sigma} a_z \cdot z \end{aligned}$$

*La deuxième somme est une somme au sens de la loi de groupe dans  $\mathbb{C}/\Lambda$ .*

a) *Montrer que si  $D$  est principal, alors  $A(D) = 0$  dans  $\mathbb{C}/\Lambda$ , de sorte que  $A$  passe au quotient en un morphisme  $A : \text{Pic}_0(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ .*

b) Montrer que ce morphisme est surjectif. Il est également injectif. Pour montrer qu'il est injectif, on peut utiliser des quotients de fonction théta ou dans le cas de  $\mathbb{C}P^1$  des fonctions rationnelles. On pourra consulter [MIR] et voir les exercices 2 et 3 du TD9.

2) Soit  $D$  un diviseur de  $\Sigma$ . Identifier les groupes  $\check{H}^0(\Sigma, L_D)$  et  $\check{H}^1(\Sigma, L_D)$ .

## 2.5 Dualité de Serre et théorème de Riemann-Roch

### 2.5.1 L'opérateur de Cauchy-Riemann

Soit  $F$  un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$  et  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts sur lesquels  $F$  est trivialisable. Soit  $\Phi_i : F|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^k$  un choix de trivialisations et

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k \\ (x, v) &\mapsto (x, g_{i,j}(x)v) \end{aligned}$$

les changements de trivialisations. Soit  $s : \Sigma \rightarrow F$  une section  $\mathcal{C}^\infty$  de  $F$ . Elle se lit dans les trivialisations  $s_i = p_i \circ \Phi_i \circ s : U_i \rightarrow \mathbb{C}^k$  de sorte que pour tous  $i \neq j$  et pour tout  $x$  de  $U_i \cap U_j$ ,  $s_j(x) = g_{i,j}(x) \circ s_i(x)$  et  $d_x s_j = d_x g_{i,j}(x) \circ s_i(x) + g_{i,j}(x) \circ d_x s_i$ . À cause du premier terme  $d_x g_{i,j}(x) \circ s_i(x)$ , les données locales de  $d_x s_i$  ne se recollent pas en une section de  $T^*\Sigma \otimes F$ . La différentielle de  $s$  existe comme application linéaire de  $T\Sigma$  dans  $TF$  mais il n'y a pas de notion canonique de différentielle de  $s$  qui aille de  $T\Sigma$  dans  $F$  comme dans le cas des fonctions  $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^k$ . Toutefois le fibré  $F$  est ici holomorphe et comme on va le voir, la moitié de cette différentielle existe. Sur les fibres au-dessus d'un point  $x$  ainsi que sur  $\mathbb{C}^k$  on dispose d'une multiplication par le nombre imaginaire  $i$ . Pour ne pas confondre avec les indices, on note  $\iota$  la multiplication par ce nombre de sorte que l'on peut considérer les fonctions  $\iota \circ d_x s_i \circ \iota$ . On note alors

$$\begin{cases} \overline{\partial}_x s_i = \frac{1}{2}(d_x s_i + \iota \circ d_x s_i \circ \iota) \text{ la partie } \mathbb{C} - \text{antilinéaire de } d_x s_i \\ \partial_x s_i = \frac{1}{2}(d_x s_i - \iota \circ d_x s_i \circ \iota) \text{ la partie } \mathbb{C} - \text{linéaire de } d_x s_i \end{cases}$$

Alors comme  $g_{i,j}$  est holomorphe,  $\overline{\partial} g_{i,j} = 0$  de sorte que sur  $U_i \cap U_j$ ,  $\overline{\partial} s_j = g_{i,j} \circ \overline{\partial} s_i$ . Ainsi les applications  $\mathbb{C}$ -antilinéaires se recollent pour définir une section du fibré  $\Lambda^{0,1}\Sigma \otimes F$  des applications  $\mathbb{C}$ -antilinéaires de  $T\Sigma$  dans  $F$ .

**Définition II.51.** On appelle *opérateur de Cauchy-Riemann* ou *(0,1)-connexion* de  $F$  l'opérateur  $\overline{\partial} : s \in \Gamma(\Sigma, F) \mapsto \overline{\partial} s \in \Gamma(\Sigma, \Lambda^{0,1}\Sigma \otimes F)$  qui se lit dans les trivialisations locales de  $F$  comme l'opérateur  $\overline{\partial}$  standard (partie  $\mathbb{C}$ -antilinéaire de la différentielle).

Cet opérateur de Cauchy-Riemann satisfait la règle de Leibniz suivante :  $\forall U \subset \Sigma$  ouvert,  $\forall f : U \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{C}$ ,  $\forall s \in \Gamma(U, F)$ ,  $\overline{\partial}(fs) = (\overline{\partial}f)s + f\overline{\partial}s$  où le premier  $\overline{\partial}$  est l'opérateur standard et le deuxième, celui du fibré  $F$ .

**Remarque II.52.** En fait, réciproquement, étant donné un fibré vectoriel complexe  $F$  sur une surface de Riemann  $\Sigma$  et une application  $\overline{\partial} : \Gamma(\Sigma, F) \rightarrow \Gamma(\Sigma, \Lambda^{0,1}\Sigma \otimes F)$  qui satisfait la règle de Leibniz, il existe une unique structure de fibré vectoriel holomorphe sur  $F$  dont l'opérateur de Cauchy-Riemann associé est  $\overline{\partial}$ .

## 2.5.2 Dualité de Serre et théorème de Riemann-Roch

**Théorème II.53** (Dualité de Serre). *Soit  $L$  un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compacte  $\Sigma$ . On note  $K_\Sigma$  le fibré cotangent  $T^*\Sigma$ . Alors*

- 1)  $\check{H}^2(\Sigma, L) = 0$ ,
- 2)  $\check{H}^1(\Sigma, L) \simeq \check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma \otimes L^*)$  et  $\check{H}^0(\Sigma, L) \simeq \check{H}^1(\Sigma, K_\Sigma \otimes L^*)$ .

C'est en fait le deuxième point du Théorème II.53 qu'on appelle dualité de Serre.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}^\infty(L)$  le faisceau des sections de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du fibré  $L$  et  $\Omega^{0,1}(L)$  le faisceau des sections de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du fibré  $\Lambda^{0,1}\Sigma \otimes L$ . Le noyau de l'opérateur de Cauchy-Riemann  $\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(L) \rightarrow \Omega^{0,1}(L)$  est le sous-faisceau  $\mathcal{O}_\Sigma(L)$  des sections holomorphes de  $L$ . Le morphisme de faisceau est par ailleurs surjectif, c'est-à-dire que pour tout  $x$  de  $\Sigma$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(U, L) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^{0,1} \otimes L)$  est surjectif. Cela résulte du lemme de Dolbeault suivant qui est admis (et démontré dans[FOR] par exemple).

**Lemme II.54** (lemme de Dolbeault). *Pour toute fonction lisse  $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  où l'on note  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ , il existe une fonction lisse  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $z \in \Delta$ ,  $\bar{\partial}f(z) = g(z)d\bar{z}$ .*

On a donc la suite exacte courte de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma(L) \xrightarrow{\text{inj}} \mathcal{C}^\infty(L) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(L) \rightarrow 0$ . On en déduit une suite exacte longue en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \check{H}^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(L)) & \rightarrow & \check{H}^0(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(L)) & \rightarrow & \check{H}^0(\Sigma, \Omega^{0,1}(L)) \\ & & \rightarrow & & \check{H}^1(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(L)) & \rightarrow & \check{H}^1(\Sigma, \Omega^{0,1}(L)) \\ & & \rightarrow & & \check{H}^2(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(L)) & \rightarrow & \check{H}^2(\Sigma, \Omega^{0,1}(L)) \rightarrow 0 \end{array}$$

On note  $\delta^p : \check{H}^p(\Sigma, \Omega^{0,1}(L)) \rightarrow \check{H}^{p+1}(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(L))$  les morphismes de connexion définis comme suit. Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts dont toutes les intersections sont soit vides soit biholomorphes au disque unité de  $\mathbb{C}$ , par exemple le recouvrement associé à une triangulation comme dans la démonstration de la Proposition II.30, d'après le théorème d'uniformisation de Riemann. Alors pour tout  $s = (s_{i_0, \dots, i_p})_{i_k \neq i_l}$  dans  $\check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^{0,1}(L))$ , il existe  $t = (t_{i_0, \dots, i_p})_{i_k \neq i_l}$  dans  $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(L))$  tel que  $\bar{\partial}t = s$ , bien défini modulo un élément de  $\check{C}^p(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(L))$ . Si  $s \in \check{Z}^p(\mathcal{U}, \Omega^{0,1}(L))$ , la relation  $d^p s = 0$  n'implique pas  $d^p t = 0$  mais seulement  $\bar{\partial}(d^p t) = d^p s = 0$ .

Soit donc  $\tau = d^p t \in \text{Ker}(\bar{\partial})$ . Par définition,  $d^{p+1}\tau = 0$ , donc  $\tau$  est un cocycle et la classe de cohomologie de ce cocycle ne dépend pas du choix de  $t$ . On pose  $[\tau] = \delta^p[s]$ . À présent, l'existence de partitions de l'unité implique que pour tout  $p > 0$ ,  $\check{H}^p(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(L)) = \check{H}^p(\Sigma, \Omega^{0,1}(L)) = 0$  (voir l'exercice 2 du TD8). On en déduit que  $\check{H}^2(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(L)) = 0$  et que  $\check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(L)) = \text{Coker}(\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(\Sigma, L) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, L))$ . (Remarquons que ce dernier conoyau est par définition le groupe de cohomologie de Dolbeault  $H^{0,1}(\Sigma, L)$ , la cohomologie de Dolbeault étant un analogue de la cohomologie de de



Rham dans lequel l'opérateur  $\bar{\partial}$  joue le rôle de la différentielle extérieure  $d$ ). D'autre part on introduit les formes bilinéaires non dégénérées :

$$\begin{aligned} \Omega^{1,0}(\Sigma, L^*) \times \Omega^{0,1}(\Sigma, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \int_{\Sigma} \alpha \wedge \beta \\ \text{et } \Omega^{1,1}(\Sigma, L^*) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, f) &\mapsto \int_{\Sigma} f\omega \end{aligned}$$

qui permettent d'identifier  $\Omega^{1,0}(\Sigma, L^*)$  au dual de  $\Omega^{0,1}(\Sigma, L)$  et  $\Omega^{1,1}(\Sigma, L^*)$  au dual de  $\mathcal{C}^{\infty}(\Sigma, L)$ . De plus, pour tout  $\alpha \in \Omega^{1,0}(\Sigma, L^*)$  et pour tout  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma, L)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \alpha \wedge \bar{\partial}f &= - \int_{\Sigma} \bar{\partial}(f\alpha) - \int_{\Sigma} f\bar{\partial}\alpha \\ &= - \int_{\Sigma} d(f\alpha) - \int_{\Sigma} f\bar{\partial}\alpha \\ &= - \int_{\Sigma} f\bar{\partial}\alpha \text{ par Stokes.} \end{aligned}$$

Par suite l'adjoint de  $\bar{\partial}$  est l'opérateur  $-\bar{\partial} : \Omega^{1,0}(\Sigma, L^*) \rightarrow \Omega^{1,1}(\Sigma, L^*)$  dont les noyau et conoyau sont isomorphes à  $\check{H}^0(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes L^*)$  et  $\check{H}^1(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes L^*)$  respectivement, d'après la Proposition II.24 et ce qui précède. On en déduit que  $\check{H}^0(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes L^*)$  s'injecte dans  $\check{H}^1(\Sigma, L)$ , puisque les zéros d'une section holomorphe de  $K_{\Sigma} \otimes L^*$  sont isolés et qu'il existe donc toujours un élément de  $\Omega^{0,1}(\Sigma, L)$  à support dans le voisinage d'un point contre lequel une telle section ne s'annule pas. Il résulte du Lemme de Weyl que ce morphisme injectif  $\check{H}^0(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes L^*) \rightarrow \check{H}^1(\Sigma, L)$  est un isomorphisme (admis). On a alors de même les isomorphismes

$$\check{H}^1(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes L^*) \simeq \check{H}^0(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes (K_{\Sigma} \otimes L^*)^*) \simeq \check{H}^0(\Sigma, L),$$

ce qui conclut le théorème. □

**Corollaire II.55.** *Soit  $L$  un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compacte  $\Sigma$ .*

- 1) *Si  $\deg(L) < 0$ , alors  $\check{H}^0(\Sigma, L) = 0$ .*
- 2) *Si  $\deg(L) > 2g - 2 = -\chi(\Sigma)$ , alors  $\check{H}^1(\Sigma, L) = 0$ .*

*Démonstration.* L'ordre d'annulation d'une fonction holomorphe ou d'une section holomorphe est positif en chaque point. Par suite, si  $L$  possède une section holomorphe non nulle  $s$ , alors  $0 \leq \deg(\text{div}(s)) = \deg(L)$ . De même par définition,  $\deg(K_{\Sigma}) = 2g - 2$ . Donc si  $\deg(L) > 2g - 2$ , alors  $\deg(K_{\Sigma} \otimes L^*) < 0$  et  $\check{H}^0(\Sigma, K_{\Sigma} \otimes L^*) = 0$ , puis  $\check{H}^1(\Sigma, L) = 0$  d'après la dualité de Serre. □

Dans les deux cas donnés par le Corollaire II.55, un seul groupe de cohomologie de Čech du fibré n'est pas nul. Il reste encore à connaître sa dimension, qui est donnée par le théorème suivant.

**Théorème II.56** (Riemann-Roch). *Soit  $L$  un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann  $\Sigma$  compacte et connexe. Alors  $\dim \check{H}^0(\Sigma, L) - \dim \check{H}^1(\Sigma, L) = \deg(L) + 1 - g(\Sigma)$ .*

*Démonstration.* Soit  $D$  un diviseur tel que  $L \simeq L_D$ . Un tel diviseur est donné par la Proposition II.49. On écrit  $D = \sum_{i \in I} a_i z_i$  avec  $a_i \in \mathbb{Z}^*$  et  $(z_i)_{i \in I}$  un ensemble fini de points distincts de  $\Sigma$ . Soit  $U_0 = \Sigma \setminus \bigcup_{i \in I} \{z_i\}$ . Le fibré  $L$  se trivialise au dessus de  $U_0$ . Dans cette trivialisaton, toute section holomorphe (locale) définie sur un ouvert  $U$  se lit comme une fonction holomorphe sur  $U \cap U_0$ . Cette fonction holomorphe se prolonge en une fonction méromorphe sur  $U$  ayant un pôle d'ordre au plus  $a_i$  en  $z_i$  si  $a_i > 0$  ou un zéro d'ordre au moins  $|a_i|$  en  $z_i$  si  $a_i < 0$ . En effet d'après la sous-section 2.4.2, et avec les mêmes notations,  $g_i f$  est holomorphe sur  $U \cap U_i$ , c'est-à-dire  $\text{div}(f) + D \geq 0$  (c-à-d un diviseur dont tous les coefficients sont positifs). Soit  $z \in \Sigma$  et  $D' = D + z$ . On déduit de ce qui précède un morphisme de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma(L_D) \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma(L_{D'})$ . Le faisceau quotient, appelé faisceau gratte-ciel et noté  $\underline{L}_z$ , est défini par :

$$\forall U \subset \Sigma, \Gamma(U, \underline{L}_z) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } z \notin U \\ (L_{D'})_z & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $(L_{D'})_z$  est la fibre de  $L_{D'}$  en  $z$ . Le morphisme  $ev_z : \mathcal{O}_\Sigma(L_{D'}) \rightarrow \underline{L}_z$  associe à toute section  $s$  de  $L_{D'}$  définie sur un ouvert  $U$  contenant  $z$  sa valeur au point  $z$  et 0 si  $U$  ne contient pas  $z$ . C'est le morphisme d'évaluation au point  $z$ . On en déduit une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma(L_D) \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma(L_{D'}) \xrightarrow{ev_z} \underline{L}_z \rightarrow 0$  puisqu'une section holomorphe locale de  $\mathcal{O}_\Sigma(L_{D'})$  qui appartient au noyau de  $ev_z$  se lit comme une fonction méromorphe  $f$  telle que  $\text{div}(f) + D \geq 0$ . Cette suite courte induit la suite exacte longue en cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \check{H}^0(\Sigma, L_D) & \rightarrow & \check{H}^0(\Sigma, L_{D'}) & \xrightarrow{ev^0} & \check{H}^0(\Sigma, \underline{L}_z) \\ & & \rightarrow & \check{H}^1(\Sigma, L_D) & \rightarrow & \check{H}^1(\Sigma, L_{D'}) & \xrightarrow{ev^0} & \check{H}^1(\Sigma, \underline{L}_z) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Par définition,  $\dim(\check{H}^0(\Sigma, \underline{L}_z)) = 1$  et  $\check{H}^1(\Sigma, \underline{L}_z) = 0$  puisque  $\check{C}^1(\mathcal{U}, \underline{L}_z) = 0$  dès que  $\mathcal{U}$  est un recouvrement dont un seul ouvert contient  $z$ . On a donc l'alternative  $ev^0$  est nul ou  $ev^0$  est surjectif. Dans le premier cas  $\dim(\check{H}^1(\Sigma, L_D)) = 1 + \dim(\check{H}^1(\Sigma, L_{D'}))$  et  $\check{H}^0(\Sigma, L_D) \simeq \check{H}^0(\Sigma, L_{D'})$ . Dans le deuxième,  $\dim(\check{H}^0(\Sigma, L_{D'})) = 1 + \dim(\check{H}^0(\Sigma, L_D))$  et  $\check{H}^1(\Sigma, L_D) \simeq \check{H}^1(\Sigma, L_{D'})$ . En notant  $\chi(L) = \dim(\check{H}^0(\Sigma, L)) - \dim(\check{H}^1(\Sigma, L))$ , on aboutit à la relation  $\chi(L_{D+z}) = \chi(L_D) + 1$  (il n'était en fait pas nécessaire d'utiliser la Proposition II.49 au début de cette démonstration pour aboutir à cette relation).

Soit alors  $D''$  un diviseur positif tel que  $D + D''$  soit positif. Par ce qui précède  $\chi(L_{D+D''}) = \chi(L_D) + \deg(D'')$  et  $\chi(L_{D+D''}) = \chi(L_0) + \deg(D + D'')$  où 0 désigne le diviseur nul, donc  $L_0$  le fibré trivial, de sorte que  $\chi(L_D) = \chi(L_0) + \deg(D)$ . Il reste donc à montrer que  $\chi(L_0) = 1 - g(\Sigma)$ . Comme  $\Sigma$  est compacte et connexe, les seules sections

globales du fibré trivial sont constantes, de sorte que  $\dim(\check{H}^0(\Sigma, L_0)) = 1$ . Il s'agit donc de montrer que

$$\dim(\check{H}^1(\Sigma, L_0)) = g = \dim(\check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma))$$

par dualité de Serre. En fait, la définition classique du genre en géométrie algébrique est  $g = \dim(\check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma))$ , mais avec notre définition, ce dernier point résulte du Théorème de Hodge par exemple et on l'admet. En fait,  $2g = \dim_{\mathbb{C}}(H^1(\Sigma, \mathbb{C}))$  (cohomologie de de Rham) et donc

$$2g = \dim(H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})) + \dim(H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C})) = 2\dim(H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C})),$$

où  $H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})$  et  $H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C})$  sont les groupes de cohomologie de Dolbeault qui sont conjugués l'un de l'autre. Or on a vu dans la démonstration du Théorème II.53 que  $H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C}) \simeq \check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)$ .  $\square$

On énonce à présent quelques conséquences du théorème de Riemann-Roch.

- 1)  $\dim(\check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma)) = \dim(\check{H}^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)) = g$ . Ainsi toute surface de Riemann de genre  $g$  possède exactement  $g$  1-formes holomorphes linéairement indépendantes. Ce nombre de 1-formes indépendantes est en fait la définition classique du genre en géométrie algébrique.

**Exemple II.57.** •  $\Sigma = \mathbb{C}P^1$  n'a pas de 1-forme holomorphe non nulle d'après le Corollaire I.35.

•  $\Sigma = \mathbb{C}/\Lambda$ , la 1-forme  $dz$  engendre l'espace des 1-formes holomorphes de  $\Sigma$ .

- 2) Si  $\deg(L) > g - 1$ , alors  $\Sigma$  possède des sections holomorphes globales non nulles. En choisissant  $L = L_D$ , on en déduit l'existence de fonctions méromorphes sur  $\Sigma$ . Si  $\deg(L) \geq 2g + 1$ , ces fonctions permettent même de plonger  $\Sigma$  dans un espace projectif de grande dimension, ce qui prouve que  $\Sigma$  est projective.

**Corollaire II.58.** Toute courbe  $\Sigma$  de genre 0 est isomorphe à  $\mathbb{C}P^1$ .

*Démonstration.* Soit  $z \in \Sigma$  et  $D = z$ . Si  $g(\Sigma) = 0$ , alors  $\dim(\check{H}^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(L_D))) \geq 2$  par Riemann-Roch. Par conséquent, il existe nécessairement une fonction méromorphe  $f$  sur  $\Sigma$  ayant un unique pôle simple en  $z$  puisque toute section holomorphe de  $L_D$  se lit comme une fonction méromorphe sur  $\Sigma$  avec au plus un pôle simple en  $z$ , et les fonctions n'ayant pas de pôles sont holomorphes donc constantes. Cette fonction méromorphe  $f$  définit un revêtement ramifié de  $\Sigma$  sur  $\mathbb{C}P^1$  de degré 1. Ce revêtement est donc un isomorphisme (sans point de ramification en particulier).  $\square$

### 2.5.3 Théorème d'Abel-Jacobi

Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte. On vient de voir que  $\dim(\check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma)) = g$ . Soit  $\gamma$  un lacet orienté de  $\Sigma$ ,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (par exemple une réunion d'arêtes d'une triangulation  $\tau$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Sigma$ ). Il fournit une forme linéaire

$$\begin{aligned} \lambda_\gamma : \check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma) &\rightarrow \mathbb{C}. \\ \alpha &\mapsto \int_\gamma \alpha \end{aligned}$$

Cette forme donne par définition un morphisme

$$\begin{array}{ccc} Z_1(\tau, \mathbb{C}) & \rightarrow & (\check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma))^* \\ \gamma & \mapsto & \lambda_\gamma \end{array}$$

Alors, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont homologues, il existe  $\delta \in C_2(\tau, \mathbb{C})$  tel que  $\partial\delta = \gamma_2 - \gamma_1$  et d'après le Théorème de Stokes, on a

$$\int_\delta d\alpha = \int_{\partial\delta} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha - \int_{\gamma_1} \alpha.$$

Or  $\alpha$  est holomorphe donc  $\bar{\partial}\alpha = 0$  et comme  $\dim\Sigma = 1$ ,  $T_z\Sigma$  ne possède pas de forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire antisymétrique non nulle et ce pour tout  $z$ , de sorte que  $d\alpha = \partial\alpha = 0$ . Par suite,  $\int_{\gamma_2} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha$  et donc  $\lambda_{\gamma_1} = \lambda_{\gamma_2}$ . L'application  $\gamma \mapsto \lambda_\gamma$  ne dépend que de la classe d'homologie de  $\gamma$  et fournit donc un morphisme  $\lambda : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma)^*$  (avec  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$  et  $\check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma)^* \simeq \mathbb{C}^g$ ).

**Définition II.59.** *Le sous-groupe  $\Lambda = \text{Im}(\lambda)$  est appelé sous-groupe des périodes de  $\Sigma$  et le quotient  $\text{Jac}(\Sigma) = \check{H}^0(\Sigma, K_\Sigma)^*/\Lambda$  est appelé Jacobienne de  $\Sigma$ .*

Ce sous-groupe  $\Lambda$  satisfait les « relations bilinéaires de Riemann » dont il résulte en particulier que c'est un réseau (voir l'exercice 1 du TD10). Par suite  $\text{Jac}(\Sigma)$  est compacte. C'est un tore complexe. Soit  $z_0 \in \Sigma$ . On définit l'application d'Abel-Jacobi

$$\begin{array}{ccc} A_{z_0} : \Sigma & \rightarrow & \text{Jac}(\Sigma) \\ z & \mapsto & (\alpha \mapsto \int_{\gamma_{z_0, z}} \alpha) \text{ mod}(\Lambda) \end{array}$$

où  $\gamma_{z_0, z}$  est un chemin de  $\Sigma$  qui relie  $z_0$  à  $z$ .  $A_{z_0}$  ne dépend pas du choix du chemin mais dépend du choix de  $z_0$ . Cette application se prolonge en un morphisme sur le groupe des diviseurs

$$\begin{array}{ccc} A_{z_0} : \text{Div}(\Sigma) & \rightarrow & \text{Jac}(\Sigma) \\ \sum_{z \in \Sigma} a_z z & \mapsto & \sum_{z \in \Sigma} a_z A_{z_0}(z), \end{array}$$

où la deuxième somme est la loi de groupe dans  $\text{Jac}(\Sigma)$ . La restriction de ce morphisme au groupe  $\text{Div}_0(\Sigma)$  des diviseurs de degré 0 ne dépend pas du choix de  $z_0$  (exercice). On en déduit un morphisme  $A : \text{Div}_0(\Sigma) \rightarrow \text{Jac}(\Sigma)$ , voir l'exercice II.50 du §2.4.2.

Concluons finalement ce cours par les Théorèmes d'Abel et de Jacobi suivants que l'on admet. On pourra consulter [MIR] pour une démonstration du premier.

**Théorème II.60** (Abel). *Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte et  $D \in \text{Div}_0(\Sigma)$ , alors  $D$  est principal si et seulement si  $A(D) = 0$ .*

D'après ce théorème d'Abel et la Proposition II.49 qui identifie  $\text{Pic}_0(\Sigma)$  au quotient de  $\text{Div}_0(\Sigma)$  par les diviseurs principaux,  $A$  induit un morphisme de groupes injectif

$$A : \text{Pic}_0(\Sigma) \rightarrow \text{Jac}(\Sigma).$$

**Théorème II.61** (Jacobi). *Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte connexe. Alors l'application d'Abel*

$$A : \text{Pic}_0(\Sigma) \rightarrow \text{Jac}(\Sigma)$$

*est surjective et établit donc un isomorphisme.*

## Références

- [BRE] G.E. Bredon, *Topology and geometry*, 1993, Springer
- [BRI] E. Brieskorn et H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, 1986, Birkhäuser
- [DON] S.K. Donaldson, *Riemann Surfaces*, 2004
- [FOR] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, 1999, Springer
- [KOD] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, 1986, Springer
- [MIR] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, 1995, Graduate Studies in Mathematics, volume 5, American Mathematical Society
- [REY] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, 1989, Birkhäuser

---

## TD 1

---

### Exercice 1

a) Rappeler pourquoi  $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

b) En donner un atlas avec deux cartes, et le changement de carte correspondant.

c) Que dire de  $X = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1^2 + \dots + z_n^2 = 1\}$ ? Montrer que  $X$  est difféomorphe à la sous-variété  $Y$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  des  $(u, v)$  tels que  $|u| = 1$  et  $\langle u, v \rangle = 0$ .

d) Soit  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . Munir  $\mathbb{T}^n$  d'un atlas  $C^\infty$  dont les changements de cartes sont localement des translations entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercice 2

a) Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Si  $U$  contient le disque fermé  $\overline{D}(a, r)$ , rappeler la formule de Cauchy exprimant  $f(a)$  comme une intégrale curviligne sur le cercle  $C(a, r)$ , et la définition de cette intégrale curviligne.

b) En déduire que si  $U$  est connexe et si la fonction  $|f|$  atteint son supremum en un point de  $U$ ,  $|f|$  est constante.

c) Rappeler pourquoi toute fonction holomorphe non constante  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est ouverte ( $U$  est supposé connexe) : l'image de tout ouvert de  $U$  est un ouvert de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

d) En déduire que dans la question b),  $f$  est constante ("principe du maximum du module").

**Exercice 3** On note  $\mathbb{D}$  le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ . a) Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une application holomorphe telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que l'on peut écrire  $f(z) = zg(z)$ , pour une fonction holomorphe  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ . Que vaut  $g(0)$  ?

b) En utilisant l'exercice 2, en déduire le *lemme de Schwarz* : on a  $|f'(0)| \leq 1$ , et s'il y a égalité,  $f(z) = \lambda z$  pour un nombre complexe  $\lambda$  de module 1.

c) Soit  $a$  un point de  $\mathbb{D}$ . Vérifier que  $z \mapsto (z - a)/(1 - \bar{a}z)$  est une bijection holomorphe de  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , d'inverse holomorphe (un "biholomorphisme"). Expliquer au passage pourquoi une bijection holomorphe est toujours d'inverse holomorphe.

d) En déduire que tout biholomorphisme  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est de la forme  $\phi(z) = \lambda(z - a)/(1 - \bar{a}z)$ , avec  $|\lambda| = 1$  et  $a \in \mathbb{D}$ .

e) Montrer que l'application  $z \mapsto (z - i)/(z + i)$  définit un biholomorphisme du demi-plan supérieur  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$  vers  $\mathbb{D}$ , et en déduire la forme des biholomorphismes de  $H$  vers lui-même.

**Exercice 4** Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , de coordonnées  $(x, y, z)$ .

a) Exprimer la projection stéréographique  $\phi_0$  de  $U_0 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  vers le plan  $z = 0$ , depuis le pôle  $\{(0, 0, 1)\}$ . Idem pour  $\phi_1$  de  $U_0 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$  vers le plan  $z = 0$ .

**b)** On considère les identifications  $j_0 : (x, y) \mapsto x - iy$ ,  $j_1 : (x, y) \mapsto x + iy$  du plan  $z = 0$  avec  $\mathbb{C}$ , et les applications  $\psi_k = j_k \circ \phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1$ . Vérifier que dans  $U_0 \cap U_1$ , le produit  $\psi_0 \psi_1$  est constant égal à 1.

**c)** Qu'en déduire concernant le changement de carte  $\psi_1 \circ \psi_0^{-1}$  ?

**Exercice 5** On considère l'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto e^z$ .

**a)** Montrer que pour tout réel  $a$ , la restriction de  $\exp$  à la bande  $\Im(z) \in ]a, a + 2\pi[$  est un difféomorphisme sur son image.

**b)** Montrer que tout chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  se "relève" en un chemin continu  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ , et que tout autre relèvement continu est de la forme  $\tilde{\gamma} + 2i\pi k$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 6** Soit  $C = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 = 1\}$ . C'est une sous-variété de  $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$  (exercice 1).

**a)** Soit  $p_1 : C' = C \setminus \{z_2 = 0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$  la première projection. Montrer que  $p_1$  est un difféomorphisme local.

**b)** Montrer que tout chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$  se "relève" en un chemin continu  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C'$  tel que  $p_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ , et qu'il y a exactement deux tels relèvements.

**c)\*** Montrer que tout chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  se "relève" en un chemin continu  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$  tel que  $z_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

**Exercice 7**

**a)** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $f(1/n) = 1/n^2$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Que dire de  $f$ ? (penser au "principe des zéros isolés")

**b)** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^n$ ,  $C > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $f$  est un polynôme complexe de degré au plus  $n$  (on pourra penser à la formule de Cauchy pour les dérivées d'une fonction holomorphe).

**c)** Déduire du cas  $n = 0$  de la question précédente que tout polynôme complexe non constant a une racine ("théorème fondamental de l'algèbre").

**Exercice 8** On rappelle le "principe des singularités inexistantes" : si  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et bornée au voisinage de  $a \in U$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ , elle se prolonge en une fonction holomorphe sur  $U$ .

**a)** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et *propre*, c-à-d telle que l'image réciproque de tout compact est compacte. Montrer que la fonction  $g(z) = 1/f(1/z)$  est holomorphe et bornée dans un disque épointé  $D(0, r) \setminus \{0\}$ , pour  $r > 0$  assez petit.

**b)** En déduire que  $f$  est un polynôme complexe.

**c)** Montrer que tout biholomorphisme  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est de la forme  $f(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ .



**Exercice 9** Une fonction holomorphe  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite méromorphe en  $a \in U$  ( $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ ) si  $f(z) = g(z)/(z - a)^n$  pour une fonction holomorphe  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  et un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**a)** Soit  $f : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, méromorphe en  $a_1, \dots, a_m$ . Montrer que si  $f(z)$  a une limite (éventuellement infinie) quand  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $f(z)$  est une fraction rationnelle en  $z$ ,  $f(z) = p(z)/q(z) \in \hat{\mathbb{C}}(z)$ , avec  $p(z)$ ,  $q(z)$  deux polynômes complexes.

---

## TD 2

---

**Exercice 1** Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une application holomorphe différente de l'application constante  $\infty$ .

a) Montrer qu'il existe deux polynômes  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$  sans racine commune tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait

$$\begin{aligned} f(z) &= P(z)/Q(z) \text{ si } Q(z) \neq 0 \\ f(z) &= \infty \text{ si } Q(z) = 0 \\ f(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} P(z)/Q(z). \end{aligned}$$

b) Montrer que si  $(P_1, Q_1)$  est une autre solution, on a  $P_1 = \lambda P$ ,  $Q_1 = \lambda Q$  pour un nombre complexe non nul  $\lambda$ . On note alors par abus  $f(z) = P(z)/Q(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , et on identifie  $f$  à la fraction rationnelle  $P/Q \in \hat{\mathbb{C}}(z)$ .

c) Soit  $d = \sup(\deg P, \deg Q) \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $t \in \hat{\mathbb{C}}$  sauf un nombre fini,  $f^{-1}(t)$  est de cardinal  $d$ . On appelle  $d$  le degré de  $f$  (ou de la fraction rationnelle  $P/Q$ ). Si  $d > 0$ , montrer que  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est un revêtement ramifié.

d) Dédurre de ce qui précède que tout biholomorphisme  $f : \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{C}}$  est de la forme

$$f(z) = (az + b)/(cz + d)$$

pour une matrice complexe inversible  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  qui est bien définie à un facteur complexe près, et que l'on peut supposer de déterminant 1. Autrement dit  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \simeq PGL_2(\mathbb{C}) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ .

e) (exemples) Si  $k \geq 1$  est entier,  $z \mapsto z^k$  définit un revêtement ramifié  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , de degré  $k$ , dont la restriction  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un revêtement (non ramifié).

Pour  $c \in \mathbb{C}$ , quelles sont les valeurs critiques de  $z \mapsto z^2 + c$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  dans  $\hat{\mathbb{C}}$ ? Les points critiques?

**Exercice 2** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fonction méromorphe dans  $U$ . Pour tout  $a \in U$ ,  $f$  admet un *développement de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - a)^k,$$

où  $c_k = 0$  pour  $k < k_0$ , et la série converge si  $0 < |z - a| < r_0$ . On appelle  $c_{-1}$  le *résidu* de  $f$  (mieux : de  $f(z)dz$ ) au point  $a$ . On le note  $\text{Res}_a f(z)dz$ . Bien sûr, si  $a$  n'est pas un pôle de  $f$ , ce résidu est nul.

a) Montrer que

$$\text{Res}_a f(z)dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} f(z) dz$$

pour  $0 < r < r_0$ , où  $C(a, r)$  désigne le cercle  $\{z \mid |z-a| = r\}$ , orienté trigonométriquement.

**b)** Soit  $\Omega \subset\subset U$  un ouvert relativement compact tel que  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega \subset U$  soit une courbe  $C^1$  par morceaux évitant les pôles de  $f$ . Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_{a \in \Omega} \text{Res}_a f(z) dz,$$

où  $\partial\Omega$  est orientée comme bord de  $\Omega$ , c-à-d "normale sortante d'abord". (On pourra admettre – ou se souvenir – que si  $\Omega$  ne contient aucun pôle de  $f$ , l'intégrale du premier membre est nulle).

**Exercice 3** On définit un cercle  $\Gamma \subset \hat{\mathbb{C}}$  comme tout sous-ensemble fermé infini de  $\hat{\mathbb{C}}$ , distinct de  $\hat{\mathbb{C}}$ , dont la trace sur  $\mathbb{C}$  est de la forme

$$\Gamma \cap \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha|z|^2 + 2\text{Re}(\bar{\beta}z) + \gamma = 0\}$$

avec  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$  (en particulier,  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ).

**a)** Soit  $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ ,  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ . Montrer que pour tout cercle  $\Gamma \subset \hat{\mathbb{C}}$ ,  $f^{-1}(\Gamma)$  est un cercle de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**b)** Deux cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \hat{\mathbb{C}}$  sont dits *orthogonaux* si ils s'intersectent en un point  $a$ , et leurs espaces tangents réels  $T_a\Gamma_1, T_a\Gamma_2$  sont orthogonaux dans  $T_a\hat{\mathbb{C}}$  (c'est indépendant du point d'intersection). Montrer que tout  $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  préserve l'orthogonalité des cercles.

---

## TD 3

---

Toutes les variétés et applications entre elles dans ce qui suit sont supposées de classe  $C^\infty$ , par commodité.

**Exercice 1** Soit  $V$  un champ de vecteurs tangents sur une variété  $M$ .

**a)** Montrer que si  $V$  s'annule en  $a \in M$ , il existe une unique application linéaire  $V'(a) : T_a M \rightarrow T_a M$  telle que pour tout chemin différentiable  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  avec  $\gamma(0) = a$ , on ait  $V'(a)\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} V(\gamma(t))/t$ .

On dit que  $a$  est un zéro (ou point singulier) non-dégénéré de  $V$  si  $V'(a)$  est bijective. On appelle alors *indice* de ce point singulier le signe ( $\pm 1$ ) de  $\det V'(a)$ .

Si  $M$  est compacte et si tous les zéros de  $V$  sont non-dégénérés, ils ont en nombre fini, et on pose  $\text{ind}(V) = \sum_{V(a)=0} \text{sgn}(\det V'(a)) \in \mathbb{Z}$ .

**b)** Plus généralement, soit  $M, N$  deux variétés,  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^\infty$ ,  $p : F \rightarrow N$  un fibré vectoriel réel ( $C^\infty$  aussi). Soit  $\phi : M \rightarrow F$  une application  $C^\infty$  telle que  $p \circ \phi = f$ . Si  $a \in M$  et  $\phi(a) = 0_{f(a)}$ , définir de même  $\phi'(a) : T_a M \rightarrow F_{f(a)}$ .

**c)** Si  $M, N$  sont des variétés, et  $f : M \rightarrow N$  une application dont la différentielle est surjective en tout point de  $M$ , rappeler pourquoi toutes les fibres  $f^{-1}(y)$ ,  $y \in N$  sont des sous-variétés de  $M$ , d'espace tangent  $T_x f^{-1}(y) = \ker T_x f$ .

**d)** Soit  $V_0, V_1$  deux champs de vecteurs à zéros non-dégénérés sur  $M$ . On suppose qu'il existe  $V : M \times [0, 1] \rightarrow TM$  de classe  $C^\infty$  avec  $V(x, t) \in T_x M$ ,  $V(x, j) = V_j(x)$  pour  $j = 0, 1$ , et telle que si  $V$  s'annule en  $(x, t)$ ,  $V'(x, t) : T_{(x,t)}(M \times [0, 1]) = T_x M \times \mathbb{R} \rightarrow T_x M$  est *surjective*.

On veut montrer que l'on a  $\text{ind}(V_0) = \text{ind}(V_1) \in \mathbb{Z}$ .

Montrer que  $V^{-1}(0_M)$  ( $0_M$  est la section nulle de  $TM$ ) est une sous-variété de dimension 1 (une courbe, généralement non connexe) dans  $M \times [0, 1]$ .

**e)** En déduire dans un premier temps que  $\text{ind}(V_0)$  et  $\text{ind}(V_1)$  ont la même parité.

**f)** On va maintenant *orienter* la courbe  $Z = V^{-1}(0_M) = \{V = 0\}$ , pour montrer que  $\text{ind}(V_0) = \text{ind}(V_1)$ .

Si  $(x, t) \in Z$ , on a  $T_{(x,t)}Z = \ker V'(x, t) : T_x M \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_x M$ .

Il s'agit de définir pour tout  $(x, t) \in Z$  une orientation de la droite  $D(x, t) = \ker(V'(x, t) : T_x M \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_x M)$ , qui dépende continûment (et donc constamment) de  $(x, t)$ .

Montrer qu'on peut choisir de façon continue (et même  $C^\infty$ ) un supplémentaire  $D(x, t)^\perp$  à  $D(x, t)$ .

**g)** Observer que la restriction de  $V'(x, t)$  à  $D(x, t)^\perp$  donne un isomorphisme linéaire  $\Phi(x, t) : D(x, t)^\perp \rightarrow T_x M$ , continu en  $(x, t) \in Z$ . En déduire que l'égalité  $T_x M \oplus \mathbb{R} = D(x, t)^\perp \oplus D(x, t)$  définit une orientation de la droite  $D(x, t)$ .

**h)** En déduire que  $\text{ind}(V_0) = \text{ind}(V_1) \in \mathbb{Z}$  (indication : compter les extrémités des courbes orientées avec des signes).

**i)** On va montrer que  $V$  de la question ci-dessus existe toujours. La valeur commune des  $\text{ind}(V)$  est "l'indice de Poincaré-Hopf, ou caractéristique d'Euler" de la variété  $M$ .

**j)** (Transversalité) Soit  $X, Y$  deux variétés,  $f : X \rightarrow Y$  une application, et  $S \subset Y$  une sous-variété. On dit que  $f$  est transversale à  $S$  si pour tout  $x \in X$  tel que  $f(x) = y \in S$ , on a  $T_y Y = \text{im} T_x f + T_y S$  (somme non nécessairement directe). Vérifier les affirmations qui suivent.

Le théorème des fonctions implicites entraîne que  $f^{-1}(S)$  est une sous-variété de  $X$ . Noter que c'est le cas si  $f(X) \cap S = \emptyset$ , auquel cas  $f^{-1}(S)$  est vide. Si  $S = \{y\}$  est un point, la transversalité signifie que  $f$  est une submersion en tout point de  $f^{-1}(y)$ .

Si  $Y = TX$ ,  $S = 0_X \simeq X \subset TX$  (section nulle), et  $f : X \rightarrow TX$  est un champ de vecteurs tangents à  $X$ , la transversalité signifie que les zéros de  $f$  sont non dégénérés.

Si  $X = M \times [0, 1]$ ,  $Y = TM$ ,  $S = 0_M$  (section nulle), et  $f = V$  comme dans la question d), la transversalité équivaut à l'hypothèse sur  $V$  de cette question.

L'existence sur  $M$  d'un champ de vecteurs tangents avec ses zéros non dégénérés et le fait que pour deux tels champs  $V_0, V_1$  il existe  $V$  comme dans la question d) résulte du

**Lemme I.62.** *Pour toute variété  $M$  compacte et tout fibré vectoriel  $p : E \rightarrow M$ , les sections de  $p$  transversales à la section nulle constituent un ouvert dense de l'espace des sections de  $p : E \rightarrow M$ , muni de la topologie naturelle qui en fait un espace de Baire.*

Preuve. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert fini de  $M$  trivialisant pour  $p$ , de sorte que  $\phi_i : p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{R}^k$ , et soit  $(\chi_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée à  $(U_i)_{i \in I}$ . On considère  $P = (\mathbb{R}^k)^I$  ("espace de paramètres"), et l'application  $C^\infty$

$$F : M \times P \rightarrow E,$$

$$(x, v) = (x, (v_i)_{i \in I}) \mapsto \sum_{i \in I} \chi_i(x) \phi_i^{-1}(x, v_i).$$

Soit  $f : M \rightarrow E$  une section  $C^\infty$  de  $p$ . Tout  $v \in P$  définit une section  $C^\infty$  "perturbée"  $f_v : x \mapsto f(x) + F(x, v)$  de  $p : E \rightarrow M$ , et il suffit de montrer qu'il y a des  $v \in P = (\mathbb{R}^k)^I$  aussi proches qu'on veut de 0 tels que  $f_v$  soit transversale à  $0_E$ .

On voit facilement que

$$G : M \times P \rightarrow E,$$

$$(x, v) \mapsto f(x) + F(x, v)$$

est transversale à la section nulle  $0_E$  : si  $G(x, v) = 0_x \in 0_E$ , en notant  $E_x = p^{-1}(x)$  la fibre de  $p$  en  $x$ , l'image de  $TG(x, v)$  contient  $E_x \simeq T_{0_x} E_x$  (considérer un  $i \in I$  tel que  $\chi_i(x) > 0$ , et utiliser  $v_i$ ), qui est supplémentaire de  $T_{0_x} 0_E$ .

Si  $Z$  désigne la sous-variété  $G^{-1}(0_E) \subset M \times P$ , la projection  $q : Z \rightarrow P$  est  $C^\infty$ , et  $v \in P$  en est une valeur régulière si et seulement si  $f_v = G|_{q^{-1}(v)}$  est transversale à la section nulle.

Dire que  $v \in P$  est une valeur régulière de  $q : Z \rightarrow P$  équivaut à la surjectivité de  $Tq(x, v) : T_{(x, v)} Z \rightarrow T_v P \simeq P$  pour tout  $x$  vérifiant  $f_v(x) = 0_x$ .

En considérant les applications linéaires

$$A = TG(x, v) : T_{(x, v)}(M \times P) \rightarrow T_{0_x} E / T_{0_x} 0_E,$$

surjective par hypothèse, et

$$B = Tpr_2(x, v) : T_{(x,v)}(M \times P) \rightarrow T_v P,$$

ceci équivaut à la surjectivité de  $B$  restreinte à  $\ker A = T_{(x,v)}Z$ . Mais on voit aisément que c'est équivalent à la surjectivité de  $A$  restreinte à  $\ker B = T_x M \times \{v\}$ , c-à-d à la transversalité en  $x$  de  $f_v$  à la section nulle. cqfd.

On conclut par le *lemme de Sard*, qui entraîne que les valeurs régulières de  $q$  sont denses dans  $P$  (en fait de mesure pleine).

### Exercice 2

a) Soit  $a, b, c$  trois points distincts dans  $\hat{\mathbb{C}}$ . Montrer qu'il existe une unique homographie  $h \in PSL_2(\mathbb{C}) = Aut(\hat{\mathbb{C}})$  telle que  $h(a) = \infty$ ,  $h(b) = 0$ ,  $h(c) = 1$ .

b) Soit  $a, b, c, d$  quatre points distincts dans  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $h$  l'homographie associée à  $a, b, c$  dans la question précédente. On définit le *birapport*  $[a, b, c, d]$  comme l'image de  $d$  par  $h$ . Quelles sont les valeurs prises par le birapport quand on permute les points  $a, b, c, d$  ?

c) Soit  $\phi(z) = (z^2 - z + 1)^3 / (z(1 - z))^2$ , fraction rationnelle de degré 6. Montrer que la valeur  $\phi([a, b, c, d])$  est invariante par permutation de  $a, b, c, d$ .

**Exercice 3** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe de degré  $d > 1$ , sans racine multiple. On considère

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$$

a) Montrer que  $X$  est une sous-variété complexe de  $\mathbb{C}^2$  (donc une surface de Riemann), et que  $p : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x$  est un revêtement ramifié holomorphe de degré 2, ramifié aux points  $(x, 0)$  tels que  $P(x) = 0$ .

b) Si  $d$  est impair (resp. pair), montrer qu'au voisinage de l'infini  $p$  est un revêtement non trivial (resp. trivial).

c) En déduire l'existence d'une surface de Riemann compacte  $\hat{X}$ , obtenue en ajoutant un ou deux points à  $X$ , et d'un revêtement ramifié holomorphe  $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  prolongeant  $p$ .

**Exercice 4** Un *réseau* dans  $\mathbb{C}$  est un sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Lambda$  est un tel réseau,  $\mathbb{C}/\Lambda$  a une structure naturelle de surface de Riemann, pour laquelle l'application quotient  $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un revêtement holomorphe.

a) Soit  $\Lambda, \Lambda'$  deux réseaux de  $\mathbb{C}$ , et soit  $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  une application holomorphe. Montrer qu'il existe une application holomorphe  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  relevant  $f$ , et une application  $h : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ , telles que pour tous  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\tilde{f}(z + \lambda) = \tilde{f}(z) + h(\lambda)$ .

b) Montrer que  $h$  est un morphisme de groupes.

c) On suppose que  $f$  est un biholomorphisme. Montrer qu'alors  $\tilde{f}$  est bijective,  $\tilde{f}(z) = az + b$ , ( $a \neq 0$ ), et  $\Lambda' = a\Lambda$ . En déduire l'existence d'une famille non dénombrable de courbes  $\mathbb{C}/\Lambda$  deux à deux non isomorphes.

---

## TD 4

---

### Exercice 1

a) Montrer que l'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair. Identifier  $\mathbb{R}P^n$  pour  $n = 1, 2, 3$ .

b) Montrer que toute variété complexe est orientable (et même orientée).

**Exercice 2** Soit  $C \subset \mathbb{C}P^n$  une courbe projective complexe (lisse). Pour  $x \in C$ , la droite projective tangente  $\tau_x C \subset \mathbb{C}P^n$  est l'unique droite projective tangente à  $C$  en  $x$ .

a) Pour  $p \in \mathbb{C}P^n$  et  $H \subset \mathbb{C}P^n$  un hyperplan projectif ne contenant pas  $p$ , soit

$$\pi_p : \mathbb{C}P^n \setminus \{p\} \rightarrow H \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$$

la projection sur  $H$  depuis  $p$ , définie par : la droite  $(px)$  coupe  $H$  en  $\pi_p(x)$ .

Montrer que l'ensemble des  $p$  tels que  $\pi_p|_C : C \rightarrow H \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$  n'est pas une immersion est la réunion des droites projectives tangentes à  $C$  (considérer la réunion des  $\{x\} \times \tau_x C$  dans  $C \times \mathbb{C}P^n$ ,  $x \in C$ ).

b) En déduire que si  $n \geq 3$ , il existe  $p$  telle que  $\pi_p|_C : C \rightarrow H \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$  est une immersion.

c) Montrer que l'ensemble des  $p$  tels que  $\pi_p|_C : C \rightarrow H \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$  n'est pas injective est la réunion des droites projectives sécantes à  $C$ , c-à-d intersectant  $C$  en au moins deux points.

d) En déduire que si  $n > 3$ , il existe  $p$  tel que  $\pi_p|_C : C \rightarrow H \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$  soit un plongement (c-à-d une immersion injective).

e) Conclure que  $C$  se plonge dans  $\mathbb{C}P^3$  et s'immerge dans  $\mathbb{C}P^2$  (holomorphiquement).

**Exercice 3** Soit  $\Lambda$  réseau dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Lambda$  est un tel réseau,  $E = \mathbb{C}/\Lambda$  a une structure naturelle de surface de Riemann (une "courbe elliptique"), pour laquelle l'application quotient  $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un revêtement holomorphe.

a) Montrer que  $\mathfrak{p}(z) = 1/z^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} (1/(z + \lambda)^2 - 1/\lambda^2)$  définit une fonction méromorphe paire sur  $\mathbb{C}$ , avec pôles (doubles) sur  $\Lambda$ .

b) Montrer que  $\mathfrak{p}(z + \lambda) = \mathfrak{p}(z)$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  (considérer  $\mathfrak{p}'(z)$ ). Donc  $\mathfrak{p}$  définit une fonction méromorphe (non constante) sur  $E = \mathbb{C}/\Lambda$ .

c) Montrer que la fonction  $\mathfrak{p}$  vérifie dans  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  l'équation différentielle

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}(z) - g_3$$

avec

$$g_2 = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}$$

**d)** En déduire que  $z \mapsto [X_0 : X_1 : X_2] = [1 : \mathbf{p}(z) : \mathbf{p}'(z)]$  définit un plongement de  $E$  dans  $\mathbb{C}P^2$ , d'image la courbe d'équation

$$X_0 X_2^2 = 4X_1^3 - g_2 X_0^2 X_1 - g_3 X_0^3.$$

(reprise de la feuille de TD 3)

**Exercice 4**

**a)** Soit  $a, b, c$  trois points distincts dans  $\hat{\mathbb{C}}$ . Montrer qu'il existe une unique homographie  $h \in PSL_2(\mathbb{C}) = Aut(\hat{\mathbb{C}})$  telle que  $h(a) = \infty$ ,  $h(b) = 0$ ,  $h(c) = 1$ .

**b)** Soit  $a, b, c, d$  quatre points distincts dans  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $h$  l'homographie associée à  $a, b, c$  dans la question précédente. On définit le *birapport*  $[a, b, c, d]$  comme l'image de  $d$  par  $h$ . Quelles sont les valeurs prises par le birapport quand on permute les points  $a, b, c, d$  ?

**c)** Soit  $\phi(z) = (z^2 - z + 1)^3 / (z(1 - z))^2$ , fraction rationnelle de degré 6. Montrer que la valeur  $\phi([a, b, c, d])$  est invariante par permutation de  $a, b, c, d$ .

**Exercice 5** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe de degré  $d > 1$ , sans racine multiple. On considère

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$$

**a)** Montrer que  $X$  est une sous-variété complexe de  $\mathbb{C}^2$  (donc une surface de Riemann), et que  $p : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x$  est un revêtement ramifié holomorphe de degré 2, ramifié aux points  $(x, 0)$  tels que  $P(x) = 0$ .

**b)** Si  $d$  est impair (resp. pair), montrer qu'au voisinage de l'infini  $p$  est un revêtement non trivial (resp. trivial).

**c)** En déduire l'existence d'une surface de Riemann compacte  $\hat{X}$ , obtenue en ajoutant un ou deux points à  $X$ , et d'un revêtement ramifié holomorphe  $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  prolongeant  $p$ .

**Exercice 6** Un *réseau* dans  $\mathbb{C}$  est un sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Lambda$  est un tel réseau,  $\mathbb{C}/\Lambda$  a une structure naturelle de surface de Riemann, pour laquelle l'application quotient  $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un revêtement holomorphe.

**a)** Soit  $\Lambda, \Lambda'$  deux réseaux de  $\mathbb{C}$ , et soit  $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  une application holomorphe. Montrer qu'il existe une application holomorphe  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  relevant  $f$ , et une application  $h : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ , telles que pour tous  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\tilde{f}(z + \lambda) = \tilde{f}(z) + h(\lambda)$ .

**b)** Montrer que  $h$  est un morphisme de groupes.

**c)** On suppose que  $f$  est un biholomorphisme. Montrer qu'alors  $\tilde{f}$  est bijective,  $\tilde{f}(z) = az + b$ , ( $a \neq 0$ ), et  $\Lambda' = a\Lambda$ . En déduire l'existence d'une famille non dénombrable de courbes  $\mathbb{C}/\Lambda$  deux à deux non isomorphes.



---

## TD 5

---

**Exercice 1** Soit  $V_d = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]_d$  l'espace vectoriel complexe des polynômes homogènes complexes de degré  $d \geq 1$ . On note  $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$  pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^3$ , de degré  $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ . On note  $P_\alpha$  le coefficient de  $X^\alpha$  dans  $P \in V_d$ .

a) Calculer la dimension de  $V_d$ .

b) Montrer que l'ensemble  $Z \subset P(V_d) \times \mathbb{C}P^2 \simeq \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$  des  $([P], [X])$  tels que  $P(X) = 0$  est une sous-variété complexe lisse de codimension 1 (on pourra se placer dans des cartes affines  $P_\alpha = 1, X_i = 1$  et considérer la fonction  $(P, X) \mapsto P(X)$ ).

c) Soit  $q : Z \rightarrow P(V_d)$  la restriction à  $Z$  de la première projection  $pr_1 : P(V_d) \times \mathbb{C}P^2 \rightarrow P(V_d)$ . Montrer que  $[P] \in P(V_d)$  est une valeur régulière de  $q$  si et seulement si  $P : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  est transversale à  $0 \in \mathbb{C}$ . Montrer que ceci équivaut au fait que  $P$  et ses dérivées partielles ne s'annulent pas simultanément en dehors de  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Dans ce cas  $q^{-1}([P])$  est une surface de Riemann, d'équation projective  $P = 0$  dans  $\mathbb{C}P^2$  (une courbe plane lisse).

d) En déduire que l'ensemble des  $[P] \in P(V_d)$  satisfaisant ces conditions est un ouvert dense de  $P(V_d)$ .

e)\* Montrer que si  $[P]$  est dans cet ouvert dense,  $P$  est irréductible.

f)\* Montrer que si  $[P]$  est dans cet ouvert dense, la courbe  $(P = 0)$  est connexe.

**Exercice 2** Soit  $Q$  une forme quadratique complexe non-dégénérée sur  $\mathbb{C}^3$ .

a) Montrer que  $Q = 0$  définit une courbe plane lisse (au sens de l'exercice précédent). On dit que  $C = \{Q = 0\}$  est une conique lisse.

b) Montrer que quitte à changer de base dans  $\mathbb{C}^3$ , on peut supposer  $Q(X, Y, Z) = XZ - Y^2$ .

c) En déduire que  $C = \{Q = 0\}$  est l'image de l'application

$$f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$$

$$(u : v) \mapsto (u^2 : uv : v^2).$$

d) Montrer que  $f$  définit un isomorphisme (biholomorphisme) de  $\mathbb{C}P^1$  vers  $C$ .

e) Retrouver géométriquement le résultat précédant, en s'aidant de la projection à partir d'un point dans  $\mathbb{C}P^2$ .

(reprise) **Exercice 3** Un *réseau* dans  $\mathbb{C}$  est un sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Lambda$  est un tel réseau,  $\mathbb{C}/\Lambda$  a une structure naturelle de surface de Riemann, pour laquelle l'application quotient  $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un revêtement holomorphe.

a) Soit  $\Lambda, \Lambda'$  deux réseaux de  $\mathbb{C}$ , et soit  $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  une application holomorphe. Montrer qu'il existe une application holomorphe  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  relevant  $f$ , et une application  $h : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ , telles que pour tous  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\tilde{f}(z + \lambda) = \tilde{f}(z) + h(\lambda)$ .

b) Montrer que  $h$  est un morphisme de groupes.

c) On suppose que  $f$  est un biholomorphisme. Montrer qu'alors  $\tilde{f}$  est bijective,  $\tilde{f}(z) = az + b$ , ( $a \neq 0$ ), et  $\Lambda' = a\Lambda$ . En déduire l'existence d'une famille non dénombrable de courbes  $\mathbb{C}/\Lambda$  deux à deux non isomorphes. Par exemple  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + it\mathbb{Z})$  pour  $t \geq 1$ .

d) On suppose maintenant seulement que  $f$  est non constante. Montrer que  $f$  est un revêtement, en considérant les formes différentielles holomorphes  $\omega = dz$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda'$  et  $f^*\omega$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

**Exercice 4** Soit  $\Lambda$  réseau dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Lambda$  est un tel réseau,  $E = \mathbb{C}/\Lambda$  a une structure naturelle de surface de Riemann (une "courbe elliptique"), pour laquelle l'application quotient  $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un revêtement holomorphe.

a) Montrer que  $\mathfrak{p}(z) = 1/z^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} (1/(z + \lambda)^2 - 1/\lambda^2)$  définit une fonction méromorphe paire sur  $\mathbb{C}$ , avec pôles (doubles) sur  $\Lambda$ .

b) Montrer que  $\mathfrak{p}(z + \lambda) = \mathfrak{p}(z)$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  (considérer  $\mathfrak{p}'(z)$ ). Donc  $\mathfrak{p}$  définit une fonction méromorphe (non constante) sur  $E = \mathbb{C}/\Lambda$ .

c) Montrer que la fonction  $\mathfrak{p}$  vérifie dans  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  l'équation différentielle

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}(z) - g_3$$

avec

$$g_2 = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}$$

d) En déduire que  $z \mapsto [X_0 : X_1 : X_2] = [1 : \mathfrak{p}(z) : \mathfrak{p}'(z)]$  définit un plongement de  $E$  dans  $\mathbb{C}P^2$ , d'image la courbe d'équation

$$X_0X_2^2 = 4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3.$$

**Exercice 5** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme complexe de degré  $d > 1$ , sans racine multiple. On considère

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = P(x)\}$$

a) Montrer que  $X$  est une sous-variété complexe de  $\mathbb{C}^2$  (donc une surface de Riemann), et que  $p : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x$  est un revêtement ramifié holomorphe de degré 2, ramifié aux points  $(x, 0)$  tels que  $P(x) = 0$ .

b) Si  $d$  est impair (resp. pair), montrer qu'au voisinage de l'infini  $p$  est un revêtement non trivial (resp. trivial).

c) En déduire l'existence d'une surface de Riemann compacte  $\hat{X}$ , obtenue en ajoutant un ou deux points à  $X$ , et d'un revêtement ramifié holomorphe  $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  prolongeant  $p$ .

---

## TD 6

---

**Exercice 1** Soit  $\Lambda$  réseau dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Lambda$  est un tel réseau,  $E = \mathbb{C}/\Lambda$  a une structure naturelle de surface de Riemann (une "courbe elliptique"), pour laquelle l'application quotient  $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un revêtement holomorphe.

a) Montrer que  $\mathfrak{p}(z) = 1/z^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} (1/(z + \lambda)^2 - 1/\lambda^2)$  définit une fonction méromorphe paire sur  $\mathbb{C}$ , avec pôles (doubles) sur  $\Lambda$ .

b) Montrer que  $\mathfrak{p}(z + \lambda) = \mathfrak{p}(z)$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  (considérer  $\mathfrak{p}'(z)$ ). Donc  $\mathfrak{p}$  définit une fonction méromorphe (non constante) sur  $E = \mathbb{C}/\Lambda$ .

c) Montrer que la fonction  $\mathfrak{p}$  vérifie dans  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  l'équation différentielle

$$\mathfrak{p}'(z)^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2\mathfrak{p}(z) - g_3$$

avec

$$g_2 = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}$$

d) En déduire que  $z \mapsto [X_0 : X_1 : X_2] = [1 : \mathfrak{p}(z) : \mathfrak{p}'(z)]$  définit un plongement de  $E$  dans  $\mathbb{C}P^2$ , d'image la courbe d'équation

$$X_0X_2^2 = 4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3.$$

### Exercice 2

a) Soit  $\Lambda, \Lambda'$  deux réseaux de  $\mathbb{C}$ , et soit  $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  une application holomorphe. Montrer qu'il existe une application holomorphe  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  relevant  $f$ , et une application  $h : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ , telles que pour tous  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\tilde{f}(z + \lambda) = \tilde{f}(z) + h(\lambda)$ .

b) Montrer que  $h$  est un morphisme de groupes.

c) On suppose que  $f$  est un biholomorphisme. Montrer qu'alors  $\tilde{f}$  est bijective,  $\tilde{f}(z) = az + b$ , ( $a \neq 0$ ), et  $\Lambda' = a\Lambda$ . En déduire l'existence d'une famille non dénombrable de courbes  $\mathbb{C}/\Lambda$  deux à deux non isomorphes. Par exemple  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + it\mathbb{Z})$  pour  $t \geq 1$ .

d) On suppose maintenant seulement que  $f$  est non constante. Montrer que  $f$  est un revêtement, en considérant les formes différentielles holomorphes  $\omega = dz$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda'$  et  $f^*\omega$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

**Exercice 3** Pour  $i = 0, 1$  soit  $U_i \subset \mathbb{C}P^1_{(x_0:x_1)}$  l'ouvert  $\{x_i \neq 0\}$ , muni de la coordonnée holomorphe  $z_i : U_i \simeq \mathbb{C}$ , avec  $z_0 = x_1/x_0$ ,  $z_1 = x_0/x_1$ . On note  $L_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , le fibré en droites holomorphe sur  $\mathbb{C}P^1$  défini comme recollement des fibrés triviaux  $U_0 \times \mathbb{C}$ ,  $U_1 \times \mathbb{C}$  par le changement de trivialisations (holomorphe)

$$(U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C} \rightarrow (U_0 \cap U_1) \times \mathbb{C}$$

$$(p, v) \mapsto (p, z_0(p)^{-k}v).$$

a) Montrer que  $L_0$  est le fibré trivial  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}$ , et  $L_{-1}$  est isomorphe au fibré tautologique  $\gamma$  des  $((x_0 : x_1), (y_0, y_1)) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$  tels que  $x_0y_1 = x_1y_0$ .

b) Montrer que  $L_2$  est isomorphe au fibré tangent  $T\mathbb{C}P^1$ .

c) Soit  $p = (0 : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2$ , et

$$\pi : \mathbb{C}P^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

la projection

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1).$$

Montrer que  $\pi$  a une structure de fibré en droites holomorphe, qui le rend isomorphe au fibré  $L_1$ . En déduire que  $L_1$  est isomorphe au fibré normal à  $\mathbb{C}P^1$  dans  $\mathbb{C}P^2$ , défini comme le quotient  $T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1}/T\mathbb{C}P^1$ .

d) Montrer qu'une section holomorphe globale de  $L_k$  s'identifie à une fonction holomorphe  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $z^{-k}f(z)$  est bornée au voisinage de l'infini.

e) En déduire que si  $k < 0$ , toute section holomorphe globale de  $L_k$  est nulle, et si  $k \geq 0$ , l'espace vectoriel des sections holomorphes globales de  $L_k$  est isomorphe à celui des polynômes homogènes de degré  $k$  en deux variables,  $\mathbb{C}[x_0, x_1]_k$  (ou encore à l'espace  $\mathbb{C}[z]_{\leq k}$  des polynômes de degré  $\leq k$  en une variable).

**Exercice 4** Si  $C$  est une surface de Riemann,  $x \in C$  et  $z : U \simeq \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  une coordonnée locale holomorphe centrée en  $x$ , on définit pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  un fibré en droites holomorphe  $L_{kx}$  sur  $C$  comme recollement des fibrés triviaux  $(C \setminus \{x\}) \times \mathbb{C}$ ,  $U \times \mathbb{C}$  par le changement de trivialisations (holomorphe)

$$(U \setminus \{x\}) \times \mathbb{C} \rightarrow (U \setminus \{x\}) \times \mathbb{C}$$

$$(p, v) \mapsto (p, z(p)^k v).$$

a) Pourquoi est-ce indépendant (à isomorphisme près) du choix de la coordonnée locale  $z$  ?

b) Montrer que pour une surface de Riemann  $C$ , l'espace des sections holomorphes globales de  $L_{kx}$  ( $x \in C$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) s'identifie à celui des fonctions méromorphes sur  $C$ , holomorphes en dehors de  $x$ , et ayant en  $x$  un pôle d'ordre au plus  $k$  si  $k \geq 0$ , et un zéro d'ordre au moins  $-k$  si  $k < 0$ .

c) On considère  $C = \mathbb{C}P^1$  et  $x = \infty = (0 : 1) \in \mathbb{C}P^1$ . Vérifier que  $L_{k\infty} = L_k$ .

d) Soit  $x = (1 : a) \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ . On pose  $U = \mathbb{C}P^1 \setminus \{x, \infty\}$ , identifié à  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , et on considère l'application

$$\phi : L_{kx}|_U \rightarrow L_k|_U$$

qui sur les fibres au-dessus de  $z \in U$  est donnée par

$$\xi \mapsto (z - a)^k \xi.$$

Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes, et qu'il se prolonge en un isomorphisme  $L_{kx} \rightarrow L_k$ .

e) Si  $A \in GL_2(\mathbb{C})$ , on note encore  $A$  l'automorphisme induit par  $A$  sur  $\mathbb{C}P^1$ . Montrer que  $A^*L_{kx}$  est isomorphe à  $L_{ky}$ , où  $A(y) = x$ .

f) En déduire que  $A^*L_k \simeq L_k$  pour tout  $x \in \mathbb{C}P^1$ .

---

## TD 7

---

**Exercice 1** Soit  $X$  un espace topologique. On rappelle qu'un préfaisceau de groupes abéliens sur  $X$  est une application  $\mathcal{F}$  qui associe à chaque ouvert  $U$  de  $X$  un groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$ , et à chaque inclusion  $(V \subset U)$  entre ouverts de  $X$  un morphisme "restriction"  $\rho(V, U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , qui vérifie  $\rho(U, U) = Id_{\mathcal{F}(U)}$  et  $\rho(W, V) \circ \rho(V, U) = \rho(W, U)$  pour  $W \subset V \subset U$ . On note aussi  $\rho(V, U)(s) = s|_V$  pour  $s \in \mathcal{F}(U)$ .

Un faisceau de groupes abéliens sur  $X$  est un préfaisceau  $\mathcal{F}$  tel que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $U$ , et toute famille  $(s_i)_{i \in I}$ ,  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ , vérifiant  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  pour tous  $i, j \in I$ , il existe un unique  $s \in \mathcal{F}(U)$  vérifiant  $s|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i \in I$ . En particulier on a  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$  : c'est le cas  $I = \emptyset$  !

a) Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau de groupes abéliens sur  $X$ . Pour tout  $p \in X$ , on définit  $\mathcal{F}_p$ , "fibre" de  $\mathcal{F}$  en  $p$ , comme l'ensemble des *germes* de sections de  $\mathcal{F}$  en  $p$ , c-à-d le quotient de  $\coprod_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$  par la relation d'équivalence  $(U, s_U) \sim (V, s_V)$  ssi il existe  $W \ni p$ ,  $W \subset U \cap V$ , tel que  $s_U|_W = s_V|_W$  ( $U, V, W$  désignent bien sûr des ouverts de  $X$ ).

Vérifier que la loi  $(U, s_U) + (V, s_V) = (U \cap V, s_U|_{U \cap V} + s_V|_{U \cap V})$  définit sur le quotient  $\mathcal{F}_p$  une structure de groupe abélien.

Si  $s \in \mathcal{F}(U)$  et  $p \in U$ , on note  $s_p$  l'image de  $(U, s)$  dans  $\mathcal{F}_p$ .

b) On munit la réunion disjointe  $E_{\mathcal{F}} = \coprod_{p \in X} \mathcal{F}_p$  de la topologie engendrée par les ouverts de la forme  $\{s_p \mid p \in U\}$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et toute section  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Montrer que l'intersection de deux tels ouverts est encore de cette forme (ils forment une "base d'ouverts"), et que la projection  $\pi : E_{\mathcal{F}} \rightarrow X$  est un homéomorphisme local.

c) On définit  $\hat{\mathcal{F}}(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  comme l'ensemble des sections continues  $s : U \rightarrow E_{\mathcal{F}}$  de  $\pi$ . Vérifier que  $\hat{\mathcal{F}}$  est un faisceau (de groupes abéliens) sur  $X$ , et que le morphisme de préfaisceaux évident  $u_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$  donne des isomorphismes  $\mathcal{F}_p \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_p$  pour tout  $p \in X$ . On appelle  $\hat{\mathcal{F}}$  le faisceau *associé* au préfaisceau  $\mathcal{F}$ .

d) Vérifier la "propriété universelle" suivante de  $\hat{\mathcal{F}}$  : pour tout faisceau  $\mathcal{G}$  de groupes abéliens sur  $X$  et tout morphisme de préfaisceaux de groupes abéliens  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , il existe un unique morphisme de faisceaux  $\hat{\phi} : \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$  tel que  $\phi = \hat{\phi} \circ u_{\mathcal{F}}$ .

e) Quel est le faisceau associé au préfaisceau  $\mathcal{F}$  défini par  $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , et l'identité pour restriction ?

**Exercice 2** Soit  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ,  $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$  deux recouvrements ouverts de  $X$  tels que  $\mathcal{V}$  est plus fin que  $\mathcal{U}$ . On se donne deux fonctions  $\lambda, \lambda' : J \rightarrow I$  telles que  $V_j \subset U_{\lambda(j)}$ ,  $V_j \subset U_{\lambda'(j)}$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau sur  $X$ , on considère les morphismes  $\rho_{\lambda}, \rho_{\lambda'} : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  de complexes de cochaînes, avec par exemple

$$\rho_{\lambda} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

$$\rho_\lambda(c)(j_0, \dots, j_p) = c(\lambda(j_0), \dots, \lambda(j_p))|_{V_{j_0 \dots j_p}}.$$

On se propose de montrer que  $\rho_\lambda, \rho_{\lambda'}$  définissent le même morphisme  $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  en cohomologie.

a) Montrer qu'il suffit d'exhiber des morphismes de groupes abéliens

$$h_p : C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}), \quad p \geq 0$$

tels que sur  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$\rho_{\lambda'} - \rho_\lambda = h_p \circ \delta + \delta \circ h_{p-1}, \quad p \geq 0$$

en convenant que  $h_{-1} = 0$ .

b) On pose  $f = \rho_{\lambda'} - \rho_\lambda$ . Pour  $c \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ,  $j \in J$ , soit

$$h_0(c)(j) = c(\lambda(j), \lambda'(j))|_{V_j}.$$

Vérifier que pour tout  $c \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ,  $f(c) = h_0(\delta c)$ .

c) Pour  $c \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ , calculer  $f(c) - \delta h_0(c)$ . En déduire que si on définit pour tout  $c \in C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$h_1(c)(j_0, j_1) = c(\lambda(j_0), \lambda'(j_0), \lambda'(j_1))|_{V_{j_0 j_1}} - c(\lambda(j_0), \lambda(j_1), \lambda'(j_1))|_{V_{j_0 j_1}},$$

on a  $f_1 = \delta \circ h_0 + h_1 \circ \delta$ . Interpréter ces calculs par une décomposition d'un carré de sommets  $0, 1, 0', 1'$  en deux triangles, et du bord du carré en deux paires d'intervalles.

d) Généralisant ce qui précède, on pose pour  $c \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$h_p(c)(j_0, \dots, j_p) = \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k c(\lambda(j_0), \dots, \lambda(j_k), \lambda'(j_k), \dots, \lambda'(j_p)).$$

Vérifier que  $f_p = h_p \circ \delta + \delta \circ h_{p-1}$ . Essayer d'interpréter la figure correspondante pour  $p = 2$  comme décomposition en 3-simplexes d'un prisme à base triangulaire et de son bord.

**Exercice 3** Soit  $X$  un espace topologique. On note  $\mathbb{Z}_X$  le faisceau de groupes abéliens sur  $X$  défini par  $\mathbb{Z}_X(U) =$  groupe des fonctions localement constantes  $U \rightarrow \mathbb{Z}$ . La cohomologie  $H^*(X, \mathbb{Z}_X)$  est aussi notée  $H^*(X, \mathbb{Z})$  ou  $\check{H}^*(X, \mathbb{Z})$ .

a) Rappeler pourquoi  $\mathbb{Z}_X$  est un faisceau.

b) Soit  $X = S^1$  le cercle unité de  $\mathbb{C}$ , muni de la topologie usuelle. Soit  $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$  le recouvrement ouvert de  $X = S^1$  défini par  $U_0 = S^1 \setminus \{1\}$ ,  $U_1 = S^1 \setminus \{-1\}$ . Expliciter  $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$  et  $\delta : C^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$ ,  $p \geq 0$ .

c) En déduire que  $H^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) \simeq \mathbb{Z}$  pour  $p = 0, 1$ , et  $H^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) = 0$  si  $p > 1$ . On peut montrer que  $\mathcal{U}$  est  $\mathbb{Z}_X$ -acyclique, et donc par le théorème de Leray admis en cours  $H^p(S^1, \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  pour  $p = 0, 1$  et nul sinon. On va le montrer plus directement.

**d)** Montrer que pour tout recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X = S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , il existe un  $n > 0$  tel que le recouvrement  $\mathcal{V}_n = (V_j)_{j \in \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}}$  défini par  $V_j = ](j-1)/2^n, (j+1)/2^n[ \pmod{1}$  est plus fin que  $\mathcal{U}$ .

**e)** Expliciter  $C^*(\mathcal{V}_n, \mathbb{Z}_X)$  et sa différentielle  $\delta$ , puis  $\rho_n : H^*(\mathcal{V}_n, \mathbb{Z}_X) \rightarrow H^*(\mathcal{V}_{n+1}, \mathbb{Z}_X)$ , en observant que  $\mathcal{V}_{n+1}$  est plus fin que  $\mathcal{V}_n$ . En déduire que  $H^p(S^1, \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  pour  $p = 0, 1$  et est nul sinon.

**f)** Adapter les deux questions précédentes à  $X = [0, 1]$  pour montrer que  $H^p([0, 1], \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  pour  $p = 0$ , nul sinon.

**Exercice 4** Soit  $X = \mathbb{C}P^1 = \{(x_0 : x_1)\}$  muni de sa topologie usuelle et du recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = (U_i)_{0 \leq i \leq 1}$ ,  $U_i = \{x_i \neq 0\}$ .

**a)** Expliciter le complexe  $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$  et sa différentielle  $\delta$ .

**b)** En déduire que  $H^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  si  $p = 0$  et est nul sinon.

**c)** Admettant que  $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , en conclure que le recouvrement  $\mathcal{U}$  n'est pas  $\mathbb{Z}_X$ -acyclique. De fait on a  $H^1(U_0 \cap U_1, \mathbb{Z}) \simeq H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$



---

## TD 8

---

**Exercice 1** Dans cet exercice, on prend pour coefficients  $\mathbb{Z}$  ou un corps  $k$ .

a) Définir une triangulation disque fermé  $\mathbb{D}^2$ , et calculer l'homologie et la cohomologie simpliciales associées.

b) Définir une triangulation du plan  $\mathbb{R}^2$ , et calculer l'homologie et la cohomologie simpliciales associées.

c) Définir une triangulation de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , et calculer l'homologie et la cohomologie simpliciales associées.

d) Définir une triangulation du tore sphère  $\mathbb{T}^2$ , et calculer l'homologie et la cohomologie simpliciales associées.

e) Définir une triangulation du plan projectif réel  $\mathbb{R}P^2$ , et calculer l'homologie et la cohomologie simpliciales associées.

**Exercice 2** Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  (paracompacte), et  $\mathcal{A}$  le faisceau des germes de fonctions  $C^\infty$  sur  $X$ .

a) Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert localement fini de  $X$ , et  $\chi_i$  une partition de l'unité subordonnée.

Si  $V$  est un ouvert de  $X$ ,  $i \in I$ , et  $f \in \mathcal{A}(V \cap U_i)$  est une fonction  $C^\infty$ , montrer que la fonction  $\chi_i f \in \mathcal{A}(V \cap U_i)$  se prolonge par zéro en une fonction  $(\chi_i f)_V^0 \in \mathcal{A}(V)$ .

b) On définit pour  $p \geq 0$  une application

$$h_p : C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$$

par  $h_p(c) = c'$ , où

$$c'(i_0, \dots, i_p) = \sum_{i \in I} (\chi_i c(i, i_0, \dots, i_p))_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}}^0.$$

Montrer que pour  $p \geq 1$ , on a

$$h_p \circ \delta + \delta \circ h_{p-1} = Id_{C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})}.$$

c) En déduire que  $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$  pour  $p \geq 1$ .

**Exercice 3** Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. On note  $\mathcal{O}$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) le faisceau des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) sur  $X$ . Le *problème de Mittag-Leffler* sur  $X$  consiste à déterminer, étant donné des points  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  de  $X$ , des coordonnées locales  $z_j$  centrées en ces points, et des "parties polaires"

$$\sum_{1 \leq k \leq n_j} a_{j,k} z_j^{-k},$$

s'il existe une fonction méromorphe sur  $X$  ayant ces parties polaires prescrites aux points  $p_j$ , et holomorphe ailleurs. On va traduire ce problème en termes de cohomologie de Čech.

**a)** Expliciter la définition du faisceau quotient  $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ , c-à-d la définition de  $\Gamma(U, \mathcal{M}/\mathcal{O})$ , pour  $U$  ouvert de  $X$ .

**b)** Soit  $\mathcal{U} = (U_j)_{0 \leq j \leq n}$  avec  $U_0 = C \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ , et  $U_j$ ,  $j \geq 1$  un disque  $|z_j| < r_j$  dans le domaine de la coordonnée  $z_j$ , ne contenant aucun  $z_k$ ,  $k \neq j$ .

Construire dans tout  $U_j$  une fonction méromorphe  $f_j \in \mathcal{M}(U_j)$  solution du problème dans cet ouvert.

**c)** Montrer que

$$c_{ij} = f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j}, \quad i \neq j, \quad i, j \in I$$

définit un 1-cocycle de  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathcal{O}$ .

**d)** Montrer que si on remplace les  $f_i$  par  $f_i + g_i$ , avec  $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ ,  $c$  change par un 1-cobord de  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathcal{O}$ .

**e)** En déduire que le problème possède une solution si et seulement si la classe de cohomologie  $[c] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$  est nulle.

---

## TD 9

---

**Exercice 1** Si  $X$  est une surface de Riemann compacte, on note  $\text{Div}(X)$  son groupe des diviseurs,  $\text{Div}^0(X)$  le sous-groupe des diviseurs de degré 0 et  $P(X)$  le sous-groupe des diviseurs des fonctions méromorphes sur  $X$  (diviseurs principaux). On rappelle que  $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq \text{Div}(X)/P(X)$ .

a) Soit  $X = \mathbb{C}P^1 = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Montrer que tout élément de  $\text{Div}^0(\hat{\mathbb{C}})$  est de la forme

$$\sum_i n_i((a_i) - (\infty)) \quad ,$$

pour des  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

b) En déduire que l'application degré est un isomorphisme  $\text{Pic}(\mathbb{C}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ , et que  $\text{Pic}(\mathbb{C}P^1)$  est engendré par la classe du fibré  $\mathcal{O}(1)$ , dual du fibré tautologique.

**Exercice 2** Soit  $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\lambda_2$  un réseau de  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  et  $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe non nulle telle que  $f(z + \lambda) = f(z)$  quels que soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $\lambda \in \Lambda$ . Pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , on pose  $D_w = \{w + t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2, 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$ .

a) Montrer que la projection  $D_w \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est bijective.

b) Soit  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $\partial D_w$  ne contient ni zéro ni pôle de  $f$ .

Montrer que  $\sum_{z \in D_w} \text{res}_z(f) = 0$ , où  $\text{res}_z(f)$  désigne le résidu de  $f$  au point  $z$ .

c) Avec les mêmes hypothèses, montrer que  $\sum_{z \in D_w} \text{ord}_z(f) = 0$ , où  $\text{ord}_z(f) \in \mathbb{Z}$  désigne l'ordre du zéro ( $> 0$ ) ou pôle ( $< 0$ )  $z$  de  $f$ .

d) En utilisant la fonction  $z \in \mathbb{C} \dashrightarrow z \frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathbb{C}$ , conclure que  $\sum_{z \in D_w} \text{ord}_z(f)z \in \Lambda$ . On pourra utiliser le fait que si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  est  $C^1$  et  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , on a  $\int_0^1 \gamma'(t)/\gamma(t) dt \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .

e) En déduire que pour la courbe elliptique  $E = \mathbb{C}/\Lambda$ , le morphisme de groupes (d'Abel)  $A : \text{Div}^0(E) \rightarrow E$  défini par  $(p) - (0) \mapsto p$  pour tout  $p \in E \setminus \{0\}$  s'annule sur le sous-groupe  $P(E)$  des diviseurs principaux, et passe donc au quotient en un morphisme  $\alpha : \text{Pic}^0(E) \rightarrow E$ , qui est surjectif.

**Exercice 3** Soit  $E \simeq \mathbb{C}/\Lambda$  une courbe elliptique, où  $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\lambda_2$  est un réseau. On se propose de montrer que  $\text{Pic}^0(E) = \text{Div}^0(E)/P(E)$  est isomorphe à  $E$  via le morphisme d'Abel  $\alpha$  de l'exercice précédent.

a) Montrer que  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$  pour un  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\tau) > 0$ .

Dans la suite, on supposera  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ .

b) Montrer que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n^2\tau + 2nz)}$$

définit une fonction holomorphe non constante  $z \mapsto \theta(z)$  sur  $\mathbb{C}$  (on pourra considérer  $\theta'(0)$ ).

c) Montrer que

$$\theta(z+1) = \theta(z) \quad \text{et} \quad \theta(z+\tau) = e^{-i\pi(\tau+2z)}\theta(z).$$

d) Vérifier que  $\theta((1+\tau)/2) = 0$ .

e) Montrer qu'il existe  $c = c_1 + c_2\tau \in ]-1/2, 1/2[ + ]-1/2, 1/2[\tau$  tel que la fonction  $\theta$  n'a pas de zéro sur le bord du parallélogramme

$$P_c = c + [0, 1] + [0, 1]\tau = [c_1, c_1 + 1] + [c_2, c_2 + 1]\tau.$$

f) Calculer

$$\int_{\partial P_c} \theta'(z)/\theta(z) dz,$$

et en déduire que  $\theta^{-1}(0) = (1+\tau)/2 + \Lambda$  et que tous ces zéros sont simples.

g) Pour  $a \in \mathbb{C}$  on pose  $\theta_a(z) = \theta(z - a + (1+\tau)/2)$ . En particulier  $\theta_a^{-1}(0) = a + \Lambda$  et tous ces zéros sont simples.

Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$  tels que  $\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \in \mathbb{Z}$ . Montrer que la fonction méromorphe

$$F(z) = \frac{\prod_i \theta_{a_i}(z)}{\prod_i \theta_{b_i}(z)}$$

est  $\Lambda$ -périodique sur  $\mathbb{C}$ .

Elle définit donc une fonction méromorphe  $f : \mathbb{C}/\Lambda = E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , telle que  $\text{div}(f) = \sum_i (p_i) - \sum_i (q_i)$ , avec  $p_i = a_i + \Lambda$ ,  $q_i = b_i + \Lambda$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

h) Déduire de ce qui précède que le noyau du morphisme de groupes

$$A : \text{Div}^0(E) \rightarrow E$$

$$\sum_i n_i (p_i) \mapsto \sum_i n_i p_i \in E = \mathbb{C}/\Lambda$$

est contenu dans le groupe  $P(E)$  des diviseurs principaux.

i) On a vu (exercice précédent) que si  $f : E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est méromorphe non nulle et  $P_c \subset \mathbb{C}$  un parallélogramme comme question e), on a

$$\sum_{z \in P_c} \text{ord}_z(f)z \in \Lambda$$

Conclure que  $P(E) = \ker A$ , et que  $\text{Pic}^0(E) \simeq E$ .

j) Montrer que l'espace quotient

$$L = (\mathbb{C} \times \mathbb{C})/(z, v) \sim (z+1, v) \sim (z+\tau, e^{-i\pi(\tau+2z)}v)$$

muni de sa projection sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  définit un fibré en droites holomorphe de degré 1 sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  (on pourra identifier  $\theta$  à une section de ce fibré).

En particulier  $\text{deg} : \text{Pic}(E) \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjective et  $\text{Pic}(E) \simeq E \times \mathbb{Z}$ .

**Exercice 4** Soit  $X$  une surface de Riemann compacte,  $D$  un diviseur sur  $X$ , et  $L_D$  le fibré en droites associé.

**a)** Identifier  $H^0(X, L_D)$  à l'espace  $L(D)$  des fonctions méromorphes  $f$  sur  $X$  telles que  $\text{div}(f) + D \geq 0$ . Montrer que  $L(D)$  est de dimension finie, nulle ou  $\leq 1 + \text{deg}(D)$ .

**b)** Tenter de décrire  $H^1(X, L_D)$  (penser au problème de Mittag-Leffler).

---

## TD 10

---

**Exercice 1** (Relations bilinéaires de Riemann) Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 1$  obtenue par identification des côtés d'un  $4g$ -gone  $P$  de bord orienté

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}.$$

Les  $a_j, b_j$  deviennent dans  $X$  des courbes fermées (lisses) encore notés (abusivement) de la même façon. Si  $\alpha$  est une 1-forme  $C^\infty$  sur  $X$ , on pose  $A_j(\alpha) = \int_{a_j} \alpha$ ,  $B_j(\alpha) = \int_{b_j} \alpha$ . On fixe un point  $o$  dans l'intérieur de  $P$ , et pour toute 1-forme  $C^\infty$  fermée  $\beta$  sur  $X$  et tout  $x \in P$ , on pose

$$f_\beta(x) = \int_o^x \beta.$$

Cette intégrale est prise le long d'un chemin lisse dans  $P$  qui joint  $o$  à  $x$ , et ne dépend pas du chemin car  $P$  est simplement connexe et  $\beta$  fermée.

**a)** Montrer que pour toute 1-forme  $C^\infty$   $\alpha$  sur  $X$  et toute 1-forme  $C^\infty$  fermée  $\beta$  sur  $X$ , on a

$$\int_{\partial P} f_\beta \alpha = \sum_{j=1}^g (A_j(\beta)B_j(\alpha) - B_j(\beta)A_j(\alpha)).$$

**b)** Soit  $\omega \in \Omega(X) = H^0(X, \Omega_X^1)$  une 1-forme holomorphe non nulle sur  $X$ . Montrer que

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^g A_j(\omega) \overline{B_j(\omega)} < 0.$$

En particulier les  $A_j(\omega)$  ne sont pas tous nuls.

**c)** En déduire que si  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  est une base complexe de  $\Omega(X)$ , la matrice  $g \times g$  complexe  $A = (A_j(\omega_k))_{jk}$  est inversible. Par un changement de base, on peut donc supposer que

$$A_j(\omega_k) = \delta_{jk},$$

c-à-d  $A = \operatorname{Id}_g$ , ce que l'on fera par la suite.

**d)** Montrer que la matrice  $g \times g$  complexe  $B = (B_j(\omega_k))_{jk}$  est symétrique.

**e)** Montrer que la matrice symétrique réelle  $\operatorname{Im} B$  est définie positive.

**f)** La jacobienne  $J(X) = \operatorname{Pic}^0(X) = \operatorname{Div}^0(X)/P(X)$  est isomorphe par l'application d'Abel-Jacobi au tore complexe  $\Omega(X)^*/\Lambda$ , où le réseau des périodes  $\Lambda \subset \Omega(X)^* \simeq \mathbb{C}^g$  est l'image de  $H_1(X, \mathbb{Z})$  par l'application d'intégration

$$[\gamma] \mapsto (\omega \mapsto \int_\gamma \omega).$$

Déduire de ce qui précède que l'on peut prendre  $\Lambda = \mathbb{Z}^g \oplus B\mathbb{Z}^g$ , avec  $B$  symétrique complexe à partie imaginaire définie positive.

**g)** Montrer que pour  $g \geq 2$ , un réseau général  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$  de  $\mathbb{C}^g$  ne peut pas être le réseau des périodes d'une surface de Riemann de genre  $g$ .

**h)** Si  $B$  est une matrice symétrique complexe  $g \times g$  à partie imaginaire définie positive, on définit  $\theta : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\theta(z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi(\lambda \cdot B\lambda + 2\lambda \cdot z)).$$

Montrer que c'est une série absolument convergente, et que la fonction holomorphe de plusieurs variables complexes ainsi définie vérifie  $\theta(z + \mu) = \theta(z)$  et  $\theta(z + B\mu) = \exp(-i\pi(\mu \cdot B\mu + 2\mu \cdot z))\theta(z)$  pour  $\mu \in \mathbb{Z}^g$  ( $x \cdot y$  désigne  $\sum_j x_j y_j$ ).

**i)** Comme dans le cas des courbes elliptiques, ces "fonctions theta" permettent de plonger  $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g \oplus B\mathbb{Z}^g)$  dans un espace projectif complexe (de grande dimension) et d'en faire une variété algébrique (une "variété abélienne"). Explorer cette piste (on pourra consulter Mumford "Tata lectures on theta", "Curves and their Jacobians", Riemann (of course) ou autre chose, comme un cours de Pierre de la Harpe à Trieste sur les variétés abéliennes). Il y a des liens avec certaines équations aux dérivées partielles (Korteweg-de Vries, alias KdV). C'est un vaste sujet, digne d'intérêt.