

Exercice 1

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_0(x, y) = 3xy$
2. $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f_1(x, y) = (2x + y, x - y)$
3. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f_2(x, y, z) = (xy, x, y)$
4. $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad f_3(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$
5. $f_4 : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{C} pris comme \mathbb{R} -ev) $f_4(x, y, z, t) = y$
6. $f_5 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (\mathbb{C} pris comme \mathbb{C} -ev) $f_5(x, y) = (2ix, (1 + i)y + 3x)$.
7. $\varphi_1 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \quad \varphi_1(P) = P' - 5P$
8. $\varphi_2 : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_2(g) = \int_a^b (t^2 + 7)g(t)dt$
9. $\varphi_3 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi_3(P) = (P(-1), P(0), P(1))$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^2 . Déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $v \in E$, les vecteurs v et $f(v)$ soient colinéaires.

1. Justifier que pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_v \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda_v v$.
2. Soit $u, v \in E$, tous deux non nuls.
 - (a) Montrer que si $\{u, v\}$ est une famille liée alors $\lambda_u = \lambda_v$.
 - (b) Montrer que si $\{u, v\}$ est une famille libre alors $\lambda_u = \lambda_v$ (on pourra écrire $f(u + v)$ de deux manières différentes).
3. En déduire que f est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire que le coefficient λ est indépendant du vecteur de E considéré.

Exercice 4

Soit f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Exercice 5

Déterminer les noyaux et les images des applications linéaires $f_1, f_3, f_4, \varphi_1, \varphi_3$ de l'exercice ???. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 6

On considère l'application $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(P) = P(1)$.

1. Montrer que u est une forme linéaire non nulle.
2. Décrire $\text{Ker } u$. En déterminer un supplémentaire.

Exercice 7

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel muni d'une base $\{u, v\}$ et m un réel. On définit f_m endomorphisme de E par :

$$\begin{cases} f_m(u) = mu + (m + 1)v \\ f_m(v) = (m - 1)u + (m - 2)v \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m f_m est-il un isomorphisme?
2. Déterminer $\text{Ker}(f_m)$ et $\text{Im}(f_m)$ en fonction des valeurs de m .

Exercice 8

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), f(1, 1, 0) = (2, 0) \text{ et } f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

2. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer l'image et le noyau de f .

Exercice 9

Soit φ la fonction définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P - XP'$ ($n \geq 1$).

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$ et une base de $\text{Im } \varphi$. L'endomorphisme φ est-il bijectif?

Exercice 10

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles du rang de f ? Déterminer les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 11

On considère l'application $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

Montrer que u est une forme linéaire non nulle.

En déduire la dimension de $\text{Ker } u$. Déterminer une base de $\text{Ker } u$.

Exercice 12 (démonstration de cours)

Soit E un \mathbb{R} -ev et p un projecteur de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

1. Montrer que $q = \text{Id} - p$ est aussi un projecteur de E et que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(q)$.
2. Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. En déduire que p est une projection vectorielle.

Exercice 13

On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. P est le sous-espace vectoriel

$$P = \{(x, y, z) \mid x - 2y + 3z = 0\}$$

et D est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 1, 1)$.

1. Donner l'expression analytique de la projection vectorielle p sur P parallèlement à D .
2. En déduire celle de la symétrie s par rapport à P parallèlement à D .

Exercice 14

Soit E un \mathbb{K} -ev. Soit $u \in L(E)$ et p un projecteur de E .

1. Montrer que $\text{Ker } p \subset \text{Ker } u \iff u \circ p = u$.
2. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Im } p \iff p \circ u = u$.

Exercice 15 (un projecteur, une symétrie)

On considère l'ev \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique (i, j) .

1. Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$\begin{cases} p(i) = \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j \\ p(j) = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j \end{cases}$$

- (a) Donner l'expression analytique de p .
 - (b) Montrer que p est une projection de E , déterminer ses éléments caractéristiques.
 - (c) Faire un dessin.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$s((x, y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \right)$$

Montrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Faire un dessin.

Exercice 16

On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique. Soit F et G les sous-ensembles de définis par $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

1. Soit a un réel et ϕ_a l'application définie sur E par pour tout $P \in E$, $\phi_a(P) = P(a)$.
 - (a) Montrer que ϕ_a est une forme linéaire de E .
 - (b) En déduire que F, G et $F \cap G$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer la dimension de F et de G .

3. On considère l'application $f : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(0)X + P(1) \end{cases}$.

- (a) Montrer que f est linéaire et déterminer son rang. Est-elle injective, surjective, bijective?
- (b) Montrer que $\text{Ker } f = F \cap G$ et déterminer une base de $F \cap G$.
- (c) Montrer que $E = F + G$. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels distincts deux à deux.

On considère l'application $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(P) = (P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)).$$

1. Montrer que f est linéaire et injective.
En déduire que f est bijective. Que fait l'application f^{-1} ?
2. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\ell_i = f^{-1}(e_i)$.
3. (a) Que dire de la famille (ℓ_1, \dots, ℓ_n) dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

- (b) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\ell_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$

Exercice 18

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $f(x, y, z) = (x + 3y + z, x - y - z, 2x + 2y)$.

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$: on donnera en particulier une base de chacun de ces deux sev.
2. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
 - (a) Montrer que $E_\lambda \neq \{0\}$ si et seulement si $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$.
 - (b) Construire une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de \mathbb{R}^3 telle que $\varepsilon_1 \in E_0$, $\varepsilon_2 \in E_{-2}$ et $\varepsilon_3 \in E_2$.
 - (c) Montrer que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\text{Im } f$.
4. On pose $g = f^3 - 4f$.
 - (a) Calculer $g(\varepsilon_1)$, $g(\varepsilon_2)$ et $g(\varepsilon_3)$ en complétant le tableau suivant :

x	$f(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$g(x)$
ε_1				
ε_2				
ε_3				

Que peut-on en déduire?

- (b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer l'application f^n suivant les valeurs de l'entier naturel n .