

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculer lorsqu'ils ont un sens, les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2, C^2$.
- Déterminer le rang des matrices A, B et C .

Exercice 2

$$\text{Soit } F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En déterminer une base et la dimension.

F est-il stable par produit matriciel ?

Exercice 3

- En utilisant par exemple des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vérifier qu'**en général**, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

- Quelle(s) condition(s) peut-on imposer à deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que la formule du binôme puisse s'appliquer pour calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A + B)^k$?
Ecrire alors la formule du binôme pour ces matrices.

- Application* : Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

- Calculer B^2 . Que peut-on dire de la matrice B ?
- Exprimer C à l'aide de B et calculer C^n en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & -7 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le rang de la matrice A .
- Soient les vecteurs de \mathbb{R}^4 : $e_1 = (2, 1, -1, 1)$ et $e_2 = (4, -1, -7, 1)$.
Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (IE4 2014)

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour une matrice carrée quelconque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le commutant de A par $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

- Montrer que \mathcal{C}_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque d'ordre 2. Montrer que $AM = MA$ si et seulement si M s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec α et β deux réels.
- (a) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque d'ordre 2. Montrer que si $B^2 = A$ alors $AB = BA$ (on pourra exprimer B^3 de deux manières).
(b) En déduire toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.
Ces matrices sont appelées les racines carrées de la matrice A .
- En utilisant la question 2, donner une base et la dimension du commutant de A .

Exercice 6

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de \mathbb{R}^3 et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images de la base \mathcal{B} :

$$u(e_1) = e_2 - e_3 \quad , \quad u(e_2) = e_3 - e_1 \quad , \quad u(e_3) = e_1 - e_2.$$

- Ecrire la matrice A de u dans la base \mathcal{B} . Déterminer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
- Calculer A^2, A^3 . Exprimer A^3 en fonction de A .
- Déterminer la matrice A^{2n+1} puis A^{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer A^2 . Qu'en déduire sur f ?
- Déterminer une base de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.
- Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la somme directe $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f$?

Exercice 8

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- Calculer $(M - I_3)^2$.
- M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 9

On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 0, -x - z)$

Déterminer le rang de u par trois méthodes différentes.

Exercice 10

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application f définie par $f(P) = P' - P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E ; déterminer son noyau et son image.
2. Écrire M la matrice de f dans la base canonique de E . Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
3. Déterminer les solutions polynômiales des équations différentielles
(1) : $y'(x) - y(x) = x^2 + 1$ et (2) : $y'(x) - y(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Exercice 12

On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$, et ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(f) = f'$. Soit $E = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de E .
2. Déterminer la matrice A de ϕ dans la base \mathcal{B} .
3. En écrivant $A = 2I_2 + B$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire la dérivée n -ième de la fonction $f : x \rightarrow (3x + 1)e^{2x}$.

Exercice 13

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 14

Soit dans \mathbb{R}^3 les vecteurs : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, -1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$,
 $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que les familles $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ sont des bases de \mathbb{R}^3 .
2. Écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{E} puis la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{F} .
3. En déduire la matrice de passage de \mathcal{E} vers \mathcal{F} .

Exercice 15

Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 16

Soient f et g deux applications linéaires définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \mapsto (2y - z, x + y + z)$$

1. Déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ dans les cas suivants :
 - (a) \mathcal{B} et \mathcal{C} sont les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3
 - (b) $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ et \mathcal{C} est la base canonique de \mathbb{R}^3
 - (c) $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$
2. Déterminer l'expression analytique de $f \circ g$, puis retrouver ce résultat à l'aide d'un produit matriciel.
3. De même pour $g \circ f$.

Exercice 17

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit f l'endomorphisme

de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. On pose $u = e_1 + e_2$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de E .
 - (b) Quelle est la matrice T de f dans cette base ?
3. Calculer T^2 et T^3 . En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace** de A le nombre $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1. Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la dimension du sous espace $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices à trace nulle ?
3. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
En déduire qu'il n'existe pas de couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AB - BA = I_n$.
Que peut-on dire de la trace de deux matrices semblables ?
4. Montrer que si $\text{Tr}({}^tAA) = 0$ alors $A = 0$.