TD14 - SUITES : Approximation numérique

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1
Le but de cet exercice est d'utiliser le théorème du point fixe pour donner une bonne approximation de la solution de l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 4x + 1$ admet une racine réelle α comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.
2. (a) α est-il un point fixe de l'application ϕ_1 définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_1(x) = x^3 - 3x + 1$?
   (b) Le théorème du point fixe s'applique-t-il à ϕ_1 sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$?
3. (a) Montrer que α est un point fixe de ϕ_2 définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_2(x) = \dfrac{x^3 + 1}{4}$.
   (b) Vérifier que le théorème du point fixe s'applique à ϕ_2 sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.
   (c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \phi_2(u_n)$.
      i. Quelle est la limite de cette suite ? Donner un majorant de $|u_n - \alpha|$ pour tout n.
      ii. Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Exercice 2
On considère l'équation $xe^x = 1$.

1. Montrer que cette équation possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. En utilisant le théorème du point fixe appliqué à une fonction à déterminer, proposer une méthode numérique permettant d'obtenir une valeur approchée de cette solution, en précisant un majorant de l'erreur commise par l'approximation.
3. Établir le nombre d'itérations nécessaire pour garantir que la valeur obtenue est exacte à 10^{-4} près.
4. A l'aide d'un calculette de poche, donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la solution.

Exercice 3
Même exercice avec l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$. *indication : x est une solution si et seulement si* $x = -\frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 4 (cosinus itéré)
Dans cet exercice, on étudie la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que cos possède un unique point fixe x^* sur $\mathbb{R}$ et que $x^* \in [\cos(1), 1]$.
2. Montrer que $u_2 \in [\cos(1), 1]$.
3. On définit la fonction suivante : $f : \begin{cases} [\cos(1), 1] \to [\cos(1), 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$.
   (a) Justifier brièvement que f est bien définie.
   (b) Montrer que l'on peut appliquer le théorème du point fixe à f et en déduire que
   $$\forall n \in_N, |u_{n+2} - x^*| \leq \frac{\sin^n(1)}{1 - \sin(1)}(1 - \cos(1)).$$
   (c) En déduire une valeur de n qui garantit que u_n est une approximation de x^* avec une erreur inférieure à 10^{-10}.
   (d) En vrai, combien de fois devez-vous appuyer sur la touche de votre calculette pour avoir un résultat stabilisé ? Est-ce en cohérence avec la valeur de n calculée ?

Exercice 5
Méthode de Newton appliquée à l'algorithme de Babylone

Partie I : Étude théorique :

1. Rappeler les hypothèses nécessaires à la mise en place de la méthode de Newton, ainsi que son principe.
2. Démontrer qu'en rajoutant les hypothèses ci-dessous, la méthode converge.
   - ⋆ f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$
   - ⋆ pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)f''(x)| < f'(x)^2$

Partie II : Algorithme de Babylone (ou méthode de Héron) On cherche à calculer la valeur approchée des nombres $\sqrt{a}$, $a > 1$ [1].

1. Soit $a > 1$.
   Décrire la méthode de Newton appliquée à la fonction f donnée par $f : \begin{cases} [\sqrt{a}, a] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - a \end{cases}$, et prouver qu'elle converge.
   On définira une suite récurrente (u_n) devant converger vers $\sqrt{a}$.
2. On souhaite étudier la vitesse de convergence vers $\sqrt{a}$ de cette suite. On pose $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$.
   (a) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$.
   (b) En déduire un majorant de ϵ_n ne dépendant que de ε_0, n et a.
3. Application au calcul de $\sqrt{2}$:
   En prenant $u_0 = 2$, combien d'itérations doit-on effectuer pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} puis 10^{-10} près ?

1. Les ordinateurs utilisent des méthodes similaires pour donner la valeur d'une racine carrée

Exercice 6
Une méthode pour accélérer la convergence des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ vers un point fixe x^* attractif est d'appliquer la méthode de Newton à la fonction $p(x) = f(x) - x$ afin de transformer x^* en point fixe superattractif (c'est-à-dire, tel que $g'(x^*) = 0$).
En effet, x^* est un point fixe de f si et seulement si c'est un zéro de p, et donc si et seulement si c'est un point fixe de $g(x) = x - \dfrac{p(x)}{p'(x)}$.
On étudie alors la convergence de la suite récurrente $v_{n+1} = g(v_n)$.
Dans cet exercice, on se contente de vérifier la convergence plus rapide sur un exemple, sans vérifier les hypothèses de convergence de la méthode.

1. Quelle suite récurrente doit-on étudier pour appliquer l'accélération de convergence pour le point fixe de la suite de l'exercice 4 ?
2. Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour stabiliser la méthode, avec la suite de l'exercice 4, puis celle de l'accélération de convergence, dans le cas d'un point de départ u_0 identique.