TD14 - SUITES

Exercice 1
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$.
Montrer que (u_n) converge en utilisant la définition de la convergence d'une suite.

Exercice 2
Étudier la convergence des suites suivantes et donner leur limite quand elle existe.

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k}$
3. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
4. $u_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$
5. $u_n = n^2 - n\cos n + (-1)^n$
6. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
7. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \cos(n\pi)$
8. $u_n = n \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$
9. $u_n = n^{-1+(-1)^n}$

Exercice 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 4
1. Montrer que les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Exercice 5
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire un encadrement de u_n puis la limite de la suite (u_n).

Exercice 6
Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et par les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
1. Vérifier que pour tout entier n, (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $u_n \leqslant v_n$.
2. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
3. Que peut-on en déduire pour leur convergence ?

Exercice 7
On considère la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente. Quelle est sa limite ?
4. (a) En comparant des aires graphiquement, démontrer que pour tout $k \geq 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq S_n \leq \ln n + 1$$
   (c) Donner un équivalent de S_n en $+\infty$ et retrouver ainsi le résultat de la question 3.
5. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout entier $n \geq 2$, par
$$v_n = S_n - \ln n \text{ et } w_n = S_{n-1} - \ln n.$$
   (a) Montrer que ces suites sont adjacentes.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(S_n - \ln n)$?
   Donner un développement asymptotique à la précision $o(1)$ de (S_n).

Exercice 8
Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + n u_n^2}$ et la donnée de $u_0 > 0$.
Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\ln x + x = n$ possède une unique solution $x_n > 0$.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et non majorée (pour non majorée on pourra raisonner par l'absurde). Déterminer sa limite.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. En posant $y_n = x_n - n$, montrer que $y_n = -\ln n + o(1)$.
5. En déduire le développement asymptotique de (x_n) à la précision $o(1)$.
6. Procéder de même avec $z_n = y_n + \ln n$ pour obtenir

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \ldots \quad , u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ termes}}.$$

1. Déterminer une application f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Sans le théorème du point fixe :
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Avec le théorème du point fixe :
   (a) Pour cette fonction et l'intervalle $I = [0;3]$, montrer que l'on peut appliquer le théorème du point fixe. En déduire la convergence de la suite (u_n) ainsi que la limite l.
   (b) A partir de quelle valeur de n, u_n diffère-t-il de l de moins de 10^{-3} ?

Exercice 11

Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 \geqslant 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n) \end{cases}$$

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Quelles sont les variations de f sur $[0, +\infty[$?
2. Étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$ selon les valeurs de x.
3. A l'aide d'un graphique, conjecturer le comportement de la suite (u_n) selon les valeurs de u_0 (monotonie, convergence).
4. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) en distinguant selon les valeurs de u_0.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

On appelle f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0, 1]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier les sens de variation des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Résoudre l'équation $(f \circ f)(x) = x$.
4. Étudier la convergence des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 1$.
On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis tracer son graphe.
   (On exprimera $f(x)$ en discutant suivant le signe de $3x + 1$.)
2. Déterminer les points fixes de f.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$.
4. En comparant u_0 et u_1, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0.