# TD 16 - DIAGONALISATION

2014 - 15
wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

**Exercice 1**
Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

$$A=\begin{pmatrix}-1&5&m\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&-2&m\\0&3&-2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

**Exercice 2**
L'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z)=(2y+z,x-y-z,2x-z)$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 3**
Étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes, et le cas échéant, les diagonaliser :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&1&0\\a&-1&2\end{pmatrix}\text{ avec } a\in\mathbb{R}\qquad V=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

**Exercice 4**
Soit $u$ l'application qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_3[X]$ associe $u(P)=X(X-1)P'-3XP$.

1. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $u$ est diagonalisable, puis donner une base de vecteurs propres de $u$.

**Exercice 5**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est $P_f=-X^3-4X$.
L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Sur $\mathbb{C}$ ?
2. Soit $g\in\mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est $P_g=-X^3+3X^2+5$.
L'endomorphisme $g$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Sur $\mathbb{C}$ ?
*(Indication : on peut étudier la fonction $P_g$.)*

**Exercice 6 (Trigonalisation)**
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ dans la base canonique $(e_1,e_2,e_3)$. Soit $u_1=e_2+e_3$, $u_2=e_1+e_2$ et $u_3=e_1+e_2+e_3$.

1. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Montrer que $u_1$ et $u_2$ sont des vecteurs propres de $f$.
 (c) Montrer que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.
 (d) L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $T^n$.

**Exercice 7 (Matrice diagonale par blocs)**
Montrer que $M$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser, où $M=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$.

**Exercice 8 (Une matrice de permutation)**
On considère la matrice de taille $n$ suivante : $A_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&0&&\ddots&1\\1&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$.

Montrer que $A_n$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On pourra utiliser la notation $\omega=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.

**Exercice 9**
Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&-3&1\\2&-2&2\end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. En déduire que $A$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 10**
Soit $M\in\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ la matrice telle que $M+I_6$ est la matrice constituée uniquement de 1. On désigne par $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c=(e_1,\dots,e_6)$ de $\mathbb{R}^6$ est $M$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(u+id_{\mathbb{R}^6})$. En donner une base $\mathcal{B}_1$ ainsi que sa dimension.
2. En déduire que $-1$ est valeur propre de $u$, de multiplicité au moins 5.
3. (a) Calculer la sixième valeur propre de $u$.
 (b) Déterminer le sous-espace propre associé dont on donnera une base $\mathcal{B}_1$.
4. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ? Expliquer pourquoi la concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^6$.
5. (a) Ecrire la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.
 (b) Calculer $\det u$ et en déduire que $u$ est bijectif.
6. (a) Montrer que $u\circ u=4u+5id_{\mathbb{R}^6}$.
 (b) En déduire la matrice $M^{-1}$.

**Exercice 11**
Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB$ et $BA$ ont les mêmes valeurs propres. *(Méthode : On prouvera que toute valeur propre de $AB$ est une valeur propre de $BA$ en distinguant les cas $\lambda=0$ et $\lambda\neq 0$).*

**Exercice 12**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

1. Déterminer les valeurs propres possibles pour $A$.
2. En déduire que, si $A$ est diagonalisable alors c'est la matrice d'une symétrie vectorielle.

**Exercice 13 (Calcul de puissances de matrices)**
Soient $M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $P$ inversible, telle que $M = PNP^{-1}$.

1. Montrer que $M^k = PN^kP^{-1}$.
2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser la matrice $M$ puis calculer $M^n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 14**
Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A$ est semblable à $D$ puis déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $Y$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $Y^2 = D$.
   (a) Montrer que $YD = DY$.
   (b) Montrer, en calculant les produits $YD$ et $DY$, que la matrice $Y$ est diagonale.
   (c) En déduire toutes les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 = D$.
3. A l'aide des résultats établis dans les deux questions précédentes, expliquer comment trouver les solutions $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.

**Exercice 15 (Systèmes différentiels)**
On cherche les fonctions $x$, $y$ et $z$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système suivant : $(\mathcal{S}) \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$. Pour cela on pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(\mathcal{S})$ s'écrive $X'(t) = AX(t)$.
2. Déterminer $D$ diagonale et $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (le calcul de $P^{-1}$ n'est pas demandé).
3. Posons $V(t) = P^{-1}X(t)$. Montrer que $X'(t) = AX(t)$ si et seulement si $V'(t) = DV(t)$.
4. Résoudre le système $V'(t) = DV(t)$.
5. En déduire les fonctions solutions de $(\mathcal{S})$.

**Exercice 16 (Suites)**

1. Diagonaliser dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n$.
2. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les données de $u_0$ et $v_0$ et par les relations : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n$.
   Calculer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$, $u_0$ et $v_0$. Ces suites sont-elles convergentes ?
3. Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$.

**Exercice 17**
Une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p$ soit nulle.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles d'une matrice nilpotente ?
2. Montrer que si $A$ est nilpotente, alors $A$ n'est pas diagonalisable. (On pourra raisonner par l'absurde).
3. Montrer que si $n = 3$ et si $T$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous nuls, alors $T$ est nilpotente.
4. Soit $A$ une matrice nilpotente : il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $A$.
   (a) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{p-1}(v))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
   (c) En déduire une majoration de $p$, puis montrer que $A^n = 0$.
   (d) Dans le cas où $p = n$, déterminer la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$. En déduire son polynôme caractéristique.

**Exercice 18**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$.
À tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de $\mathbb{R}^n[X]$ on associe l'endomorphisme $P(f) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_nf^n$ (on rappelle que $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$).

1. Montrer que tout vecteur propre de $f$ est vecteur propre de $f^k$ ($k \in \mathbb{N}$).
2. Montrer que si $x$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors $x$ est un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.
3. Montrer que si $f$ est diagonalisable alors $P(f)$ l'est aussi.
4. En déduire que si $f$ est un endomorphisme diagonalisable alors son polynôme caractéristique $\chi_f$ vérifie $\chi_f(f) = 0$ (*ce résultat est un cas particulier du théorème de Cayley-Hamilton qui dit que tout endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie est tel que $\chi_f(f) = 0$, que $f$ soit diagonalisable ou pas*).