

Cours

Définition 1. — On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \quad (\text{« factorielle } n \text{ »})$$

et l'on pose $0! = 1$. On peut définir $n!$ par récurrence selon $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Rappel. — Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles (par exemple succès et échec). Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Supposons que l'on répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Notons p la probabilité de succès à chaque épreuve. On obtient ainsi un schéma de Bernoulli de paramètres n et p que l'on peut représenter par un arbre.

Définition 2. — Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le nombre de chemins fournissant k succès sur les n répétitions est $\binom{n}{k}$ (« k parmi n »).

On peut démontrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

On peut aussi montrer que $\binom{n}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble ayant n éléments, ou encore le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble ayant n éléments.

On peut établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (formule du binôme de Newton),

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k. \end{aligned}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont encore appelés coefficients binomiaux. Ils vérifient les propriétés suivantes :

- a) pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;
- b) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$;
- c) pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (formule du triangle de Pascal).

Pour calculer $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et n , on peut utiliser le triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Notation. — Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{q-1}, u_q$ des nombres. On note

$$\prod_{i=p}^q u_i = u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_{q-1} \times u_q.$$

Par exemple, $n! = \prod_{i=1}^n i$, $e^{\sum_{i=1}^n u_i} = \prod_{i=1}^n e^{u_i}$ et si $u_1, \dots, u_n > 0$, $\ln\left(\prod_{i=1}^n u_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln u_i$.

Exercices

Exercice 1 (Factorielle)

- Donner la valeur de $n!$ pour $n \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$.
- Calculer $\frac{50!}{46!}$.
- Montrer que pour $n \geq 10$, $n! \geq 362880 \times 10^{n-9}$.
- Montrer que $\frac{(2n)!}{n!}$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le calculer pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Simplifier $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$ et $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 2$.
- Trouver le nombre de façons d'ordonner n objets distincts, c'est-à-dire trouver le nombre de permutations de n éléments.
- Trouver le nombre de façons de choisir des suites ordonnées de k objets distincts choisis parmi n objets distincts.

Exercice 2 (Formule du binôme de Newton)

- Calculer $\binom{5}{2}$, $\binom{50}{2}$, $\binom{50}{49}$.
- Développer $(a+b)^6$, $(2x-1)^5$.
- Déterminer les coefficients de $a^4b^2c^3$ et $a^4b^3c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.
- On rappelle la définition de $e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On a la formule de De Moivre, valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
 - Linéariser $\cos^6 x$. En déduire une primitive de $\cos^6 x$.
 - Écrire $\cos(5x)$ sous la forme $P(\cos x)$ où P est une fonction polynomiale à déterminer.
- Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $1.01^{10} \approx 1.105$. Trouver de même une valeur approchée de 0.99^8 à 10^{-3} près.
- En considérant le binôme $(1+x)^n$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Pour les insatiables...

Exercice 3 (Factorielle et formule du binôme de Newton)

- On suppose que $u_0 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -n u_{n-1}$. Exprimer u_n en fonction de n .
- À l'aide de l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
- En écrivant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, obtenir la valeur de la somme $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$.

Application. — Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1}$ (pour $n \geq 1$) et $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2}$ (pour $n \geq 2$).
- En déduire les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1)$, puis $\sum_{k=0}^n k^2$.

Exercice 4 (Quelques probabilités)

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, \dots, x_n . On rappelle que la loi de probabilité de X est la donnée des nombres $p_k = \mathbb{P}\{X = x_k\}$, $1 \leq k \leq n$ et que son espérance et sa variance sont respectivement données par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n p_k x_k, \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{k=1}^n p_k [x_k - \mathbb{E}(X)]^2.$$

Une autre expression de la variance est

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n p_k x_k^2.$$

1. Loi uniforme discrète

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ de loi de probabilité définie par

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{n}.$$

Toutes les valeurs de 1 à n sont équiprobables. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2. Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ de loi de probabilité définie par

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

C'est la probabilité du nombre de succès obtenus au cours d'une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.