TD 10 - ED D'ORDRE 1 À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

Exercice 1
Résoudre les équations différentielles suivantes (ne pas hésiter à chercher une solution particulière évidente).

1. $y'(t) - t^2 y(t) = 5t^2$.
2. $y'(t) + 2ty(t) = \mathrm{e}^{t-t^2}$ avec $y(0) = 3$.
3. $(1+t^2)y'(t) + y(t) = 1 + t + t^2$.
4. $y'(x) + \dfrac{4x}{x^2+4}y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.
5. $y''(t) + \dfrac{(2t-3)}{(t-1)(t-2)}y'(t) = 0$ sur $]2, +\infty[$.
6. $y'(t) - \ln(t)y(t) = \mathrm{e}^{2t}t^t$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2
Soit (E) l'équation $ty'(t) + y(t) = \mathrm{sh}(t)$.

1. (a) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer qu'il existe un seule solution de (E) sur $]0, +\infty[$ qui admet une limite finie en 0^+.
   (c) Déterminer un DL à l'ordre 1 de cette solution en 0^+.
2. Faire de même sur $]-\infty, 0[$.
3. Supposons que f soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (a) À l'aide de l'équation (E), déterminer $f(0)$.
   (b) À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression de $f(t)$ pour $t > 0$ et $t < 0$.
4. Montrer que (E) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, que l'on déterminera (on vérifiera avec soin que la solution obtenue est bien dérivable en 0).

Exercice 3
Soit (E) l'équation $x^2y'(x) + y(x) = 1$.

1. Si (E) admet une solution f définie sur $\mathbb{R}$, que vaut $f(0)$?
2. Déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, puis calculer leurs limites respectives en 0^+.
3. Faire de même en 0^-.
4. Supposons que f soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Déterminer alors les restrictions de f à $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
5. Montrer que (E) admet une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$, que l'on déterminera.

Exercice 4
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $ty'(t) - y(t) = t^2 + 1$ en utilisant les méthodes des exercices 2 et 3.

Exercice 5
Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'(x) + y(x) + y^2(x) = 0$ où y est une application dérivable qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

1. Pour toute application y qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose : $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle linéaire (F) : $x^2z'(x) - z(x) = k$ où k est une constante que l'on déterminera.
2. Résoudre (F) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Quelles sont les limites de ces solutions en 0^+ et 0^- ?
4. Montrer qu'il existe une unique solution (non nulle) de (E) définie sur $\mathbb{R}$.