TD 11 - SYSTÈMES LINÉAIRES

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & -3z & = a \\ 2x & +6y & -11z & = b \\ x & -2y & +7z & = c \end{array}\right.$$

1. En utilisant la méthode de Gauss, transformer le système (S) en système échelonné.
2. Quelle relation les paramètres a, b, c doivent-ils satisfaire pour que (S) admette au moins une solution ?
3. Le système (S) peut-il admettre une solution unique ?
4. Résoudre (S) dans le cas où $a = 1$ et où il admet au moins une solution.
5. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée.
   Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ les trois vecteurs de coordonnées respectives $(1,2,1)$, $(2,6,-2)$ et $(-3,-11,7)$.
   Pour quelle(s) valeur(s) du réel k le vecteur $\overrightarrow{p}$ de coordonnées $(2,3,k)$ peut-il s'écrire sous la forme $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$ (avec $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$) ?

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants (en précisant dans chaque cas leur rang) :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{c} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{llll} x & -y & +z & = 6 \\ 2x & -y & -z & = 1 \\ 5x & -3y & -z & = 8 \\ 4x & -3y & +z & = 13 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{lllll} x & -y & +2z & -t & = 3 \\ 2x & +y & -2z & +4t & = -3 \\ 8x & -y & +4z & -7t & = 15 \\ 3x & -y & +2z & -2t & = 6 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{lllll} -x & +3y & +z & -4t & = 3 \\ 2x & -y & +3z & -7t & = 4 \\ x & -y & +z & -2t & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants en discutant selon la valeur du paramètre α :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{c} x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = \alpha \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{llll} x & +y & -\alpha z & = -1 \\ x & -\alpha y & +z & = -1 \\ \alpha x & -y & -z & = 1 \end{array}\right. \quad (\textbf{IE 03/2011})$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{c} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = \alpha \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +3z & = 2 \\ x & +3y & -2z & = 5 \\ 2x & -y & +\alpha z & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 4

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé.
Soit k un réel.
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ les trois vecteurs de coordonnées respectives $(1,2,3)$, $(4,6,5)$ et $(9,8,k)$.

1. Pour quelle(s) valeurs(s) de k existe-t-il 3 réels a, b, c non tous nuls tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$?
   Dans ce cas, déterminer les triplets (a,b,c) qui conviennent.
2. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$.
Résoudre le système (S) en distinguant des cas selon les valeurs du paramètre m :

$$(S)\left\{\begin{array}{lll} x & +(m+1)y & = m-1 \\ mx & +(m+4)y & = 6 \end{array}\right.$$