TD 12 - ÉSPACES VECTORIELS

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E :

1. $E = \mathbb{R}^2$
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$
   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$
   (e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$
   (f) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 4y = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^4$
   (a) $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}$
   (b) $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + 2t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$ fixé
   (c) $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 5x = 3y = -t\}$
   (d) $D = \{(\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 3\beta, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $E = K[X]$
   (a) A : polynômes de degré 4 et le polynôme nul
   (b) $B = \{P \in K[X] \mid P(0) = 2\}$
   (c) $C = \{P \in K[X] \mid P(3) = 0\}$
   (d) $D = \{P \in K[X] \mid P(7) = P'(-5)\}$
   (e) $F = \{P \in K_4[X] \mid P(1) = P(0) = 0\}$
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites réelles)
   (a) A : suites croissantes
   (b) B : suites monotones
   (c) C : suites bornées
   (d) D : suites convergentes
   (e) F : suites divergentes
   (f) G : suites de limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$ fixé)
   (g) H : suites arithmétiques
   (h) I : suites géométriques
5. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
   (a) A : fonctions 2π-périodiques
   (b) $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \underset{+\infty}{=} o(x^5)\}$
   (c) $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^5\}$
   (d) $D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f'(1) = 0\}$
   (e) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f^2(0) + f(2) = 0\}$
   (f) $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \int_7^8 f = 0\}$

Exercice 2

Soit $\mathcal{F} = (u, v, w, t)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (1, 0, 1)$ et $t = (3, 2, 4)$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?

Exercice 3

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans l'espace vectoriel E ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $a = (-4, 2)$, $b = (2, 1)$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (-1, 1, 2)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (6, 2, 0)$
3. $E = \mathbb{C}^3$, $u = (1, 1 + i, 0)$, $v = (2i, 0, -1)$, $w = (1, 3 + 3i, -i)$
4. $E = \mathbb{R}[X]$, $P = 1$, $Q = X(X - 1)$, $R = X^2(X + 1)$, $S = X(X - 1)^2$.

Exercice 4

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (1, -2, k)$. On note $\mathcal{F} = (u, v, w)$.
   Pour quelle(s) valeur(s) du réel k la famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ?
   Donner alors une combinaison linéaire $au + bv + cw = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
2. Et dans $\mathbb{R}^4$ pour $\mathcal{G} = (u, v, w)$ où $u = (3, 1, -4, 6)$, $v = (1, 1, 4, 4)$, $w = (1, 0, -4, k)$?

Exercice 5

1. (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   (b) Soit $Id : x \mapsto x$. La famille $\mathcal{G} = (\cos, \sin, Id)$ est-elle libre ?
   (c) Soit $f : x \mapsto \sin(x + 2)$. La famille $\mathcal{K} = (\cos, \sin, f)$ est-elle libre ?
2. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (\exp, \ln, \mathrm{Id})$ est libre dans $\mathcal{F}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.
3. Soit a, b et c trois réels tels que $a < b < c$. Soit $A : x \mapsto e^{ax}$, $B : x \mapsto e^{bx}$, et $C : x \mapsto e^{cx}$.
   Montrer que la famille $\mathcal{M} = (A, B, C)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 6

1. Dans $E = \mathbb{C}^3$, la famille $\mathcal{A} = (a, b, c)$ avec $a = (1, 1 + i, -1)$, $b = (2, 1, 3)$ et $c = (0, -1 - 2i, 5)$ est-elle libre ? Génératrice de E ? Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$?
2. Et pour $\mathcal{A} = (a, b, c, d)$ où $a = (2, 0, 0)$, $b = (0, 1 + i, 0)$, $c = (1 - i, 3, 5 + i)$, $d = (0, 0, 3i)$.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une famille liée.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Donner une base de F.
3. Montrer que $G\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
4. Montrer que $F = G$.

Exercice 8

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - 4f' + 4f = 0\}$.
Montrer que F est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puis en donner une base.

Exercice 9

Dans $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = (a = (1, 1, -1); b = (2, 1, 3); c = (0, -1, 5))$ est-elle libre ? Génératrice ? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$?

Exercice 10 (d'après IE 04/2010)

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y = 0 \,\text{et}\, y + z + 4t = 0\}$.
Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

Exercice 11

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $e = (1, 1, 0)$, $f = (1, 0, 2)$ et $g = (0, 2, -3)$.

1. Montrer que $\mathcal{F} = (e, f, g)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 12
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $F \cap G$.

Exercice 13
Dans $\mathbb{R}_2[X]$, soit $P_1 = X^2$, $P_2 = (X - 1)^2$, $P_3 = (X + 1)^2$.
1. Donner la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer dans cette base les coordonnées du polynôme $Q = 3X^2 - 10X + 1$.

Exercice 14
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit $\mathcal{C} = ((X - 1)^k)_{0 \leq k \leq 3}$.
1. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E.
2. Soit $P = 2X^3 - X^2 + X + 5$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{C}$ (on pourra utiliser une formule de Taylor).

Exercice 15
Dans $\mathbb{R}[X]$, soit $\mathcal{F} = (P, Q)$ avec $P = 3X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 - 4$ et $\mathcal{G} = (R, S, T)$ avec $R = 5X^3 - 2X - 7, S = X^3 - 2X + 9$, et $T = 2X - 13$.
1. Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont-elles libres ? Quels sont leurs rangs respectifs ?
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

Exercice 16
Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -1, -2)$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
1. Quelle est la dimension de F ?
2. Soit $w = (3, 7, 0)$ et $t = (5, 0, -7)$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(w, t)$.
3. Soit $r = (2, k, 5)$ et $s = (3, l, 9)$. Déterminer les réels k et l tels que $F = \mathrm{Vect}(r, s)$.

Exercice 17
Pour chacun des espaces vectoriels E suivants, vérifier que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et montrer qu'ils sont supplémentaires.
1. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (4, 3, 1)$, $F = \{(x, y, z) \in E \mid x + 3y + 2z = 0\}$ et $G = \mathbb{R}u$.
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F est l'ensemble des fonctions constantes et $G = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathrm{Vect}(X^2 + 4)$ et $G = \mathrm{Vect}(X; X^2 - X)$.
4. E ensemble des suites réelles convergentes, F ensemble des suites constantes et G ensemble des suites de limite nulle.

Exercice 18 (d'après IE 04/2008)
Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 0 \,\text{et}\, 5x - 3z - t = 0\}$.
1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base $\mathcal{B}$ de F.
2. Soit $a = (0, 3, -2, 0)$ et $b = (0, 0, 0, 1)$ et soit $G = \mathrm{Vect}(a, b)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 19
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y - z, z = 4t\}$.
1. Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$ et donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20
Dans $E = \mathbb{R}^4$, on note $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, où $e_1 = (2, 2, 1, 0)$, $e_2 = (1, 4, 2, -1)$, $e_3 = (2, 1, -1, 0)$, $e_4 = (2, -5, -4, 2)$, $f_1 = (2, 1, 4, 5)$ et $f_2 = (1, 2, 3, 4)$.
Donner la dimension et une base de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 21
Dans $\mathbb{C}^4$ muni de sa base canonique, on considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4,\ x + y - z + 2t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\{u, v, w\})$, où $u = (1, 1, 0, -1)$, $v = (1, 0, 0, -1)$, $w = (1, 0, -1, 0)$.
1. Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(G)$ puis des bases de F et G.
2. Montrer que $F + G = \mathbb{C}^4$ et déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 22
Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \mathrm{Vect}(a, b, c, d)$ avec $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0, 1)$, $c = (1, 0, 2, 0)$, $d = (2, 2, 2, 3)$ et $G = \mathrm{Vect}(u, v, w, t)$ avec $u = (2, 3, 4, 0)$, $v = (0, 1, 0, 0)$, $w = (2, -1, 4, 0)$, $t = (-6, 1, -12, 0)$.
1. Déterminer les dimensions de F et de G et en donner des bases.
2. Que peut-on en déduire au sujet des dimensions de $F + G$ et $F \cap G$?
3. Trouver une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.

Exercice 23
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E alors on a : $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.

Exercice 24
1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On définit les vecteurs suivants :
   $a = e_1 + 2e_3,\ b = e_1 + 2e_2 - 2e_3,\ c_t = 8e_1 + te_2 + e_3$ où t est un paramètre réel.
   (a) Pour quelles valeurs de t la famille (a, b, c_t) est-elle libre ?
   (b) Pour quelles valeurs de t la famille (a, b, c_t) est-elle une base de E ?
2. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ x - t = 0$ et $y - z = 0\}$ et
   $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ y + z = 0$ et $x + t = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (admis pour G).
   (b) Déterminer une base de F et une base de G.
   (c) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.