TD13 - APPLICATIONS LINÉAIRES

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_0(x,y) = 3xy$
2. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$
3. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f_2(x,y,z) = (xy, x, y)$
4. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$
5. $f_4 : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ pris comme $\mathbb{R}$-ev) $\quad f_4(x,y,z,t) = y$
6. $f_5 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}$ pris comme $\mathbb{C}$-ev) $\quad f_5(x,y) = (2ix, (1+i)y + 3x)$.
7. $\varphi_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad \varphi_1(P) = P' - 5P$
8. $\varphi_2 : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \varphi_2(g) = \int_a^b (t^2+7)g(t)dt$
9. $\varphi_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi_3(P) = (P(-1), P(0), P(1))$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3

Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$ et que $\mathrm{Im}(f \circ f) \subset \mathrm{Im}\, f$.
3. Montrer que si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(f \circ f)$, alors $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ lorsque E est de dimension finie ?

Exercice 4

Déterminer les noyaux et les images des applications linéaires $f_1, f_3, f_4, \varphi_1, \varphi_3$ de l'exercice 1. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 5

On considère l'application $u : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(P) = P(1)$.

1. Montrer que u est une forme linéaire non nulle.
2. Décrire $\mathrm{Ker}\, u$. En déterminer un supplémentaire.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'une base $\{u, v\}$ et m un réel. On définit f_m endomorphisme de E par : $\begin{cases} f_m(u) = mu + (m+1)v \\ f_m(v) = (m-1)u + (m-2)v \end{cases}$.

1. Pour quelles valeurs de m f_m est-il un isomorphisme ?
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f_m)$ et $\mathrm{Im}(f_m)$ en fonction des valeurs de m.

Exercice 7

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que : $f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (2,0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$.
2. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 8

Soit φ la fonction définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P - XP'$ $(n \geqslant 1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, \varphi$ et une base de $\mathrm{Im}\, \varphi$. En déduire si φ est bijectif.

Exercice 9 (d'après IE 12/2011, Asinsa)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et soit $\mathcal{B} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de E.

1. Soit P un polynôme appartenant à E. Exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de $P(1)$, $P'(1)$, $P''(1)$, $P^{(3)}(1)$.
2. Étant donné un réel fixé a, on considère l'application f_a définie sur E par : $f_a(P) = P'' + (X-1)P' - aP$.
   (a) Montrer que f_a est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs de $f_a(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Déterminer le rang de f_a selon la valeur de a.
   (d) En déduire la dimension de $\ker f_a$ selon la valeur de a, puis expliciter $\ker f_a$.
   (e) Pour quelle(s) valeur(s) de a l'endomorphisme f_a est-il bijectif ?

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $v \in E$, les vecteurs v et $f(v)$ soient colinéaires.

1. Justifier que pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_v \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda_v v$.
2. Soit $u, v \in E$, tous deux non nuls.
   (a) Montrer que si $\{u, v\}$ est une famille liée alors $\lambda_u = \lambda_v$.
   (b) Montrer que si $\{u, v\}$ est une famille libre alors $\lambda_u = \lambda_v$ (on pourra écrire $f(u+v)$ de deux manières différentes).
3. En déduire que f est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire que le coefficient λ est indépendant du vecteur de E considéré.

Exercice 11 (d'après IE 06/2008)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Quelles valeurs peut prendre $\mathrm{rg}(f)$? Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 12
On considère l'application $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.
Montrer que u est une forme linéaire non nulle.
En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} u$. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

Exercice 13
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On définit le sous-espace vectoriel $P = \{(x, y, z) | x - 2y + 3z = 0\}$ et D est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que P et D sont supplémentaires.
2. Donner l'expression analytique de la projection p sur P parallèlement à D.
3. En déduire celle de la symétrie s par rapport à P parallèlement à D.

Exercice 14

1. On considère l'application $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y) \end{cases}$.
   Montrer que p est un projecteur. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} p$ et une base de $\operatorname{Im} p$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On considère l'application $s : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto g \text{ tel que } g(x) = f(-x) \end{cases}$.
   Montrer que s est une symétrie. Déterminer $\ker(s - id)$ et $\ker(s + id)$.

Exercice 15 (un projecteur, une symétrie)
On considère l'ev $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (i, j).

1. Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par : $\begin{cases} p(i) = \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j \\ p(j) = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j \end{cases}$
   (a) Donner l'expression analytique de p.
   (b) Montrer que p est une projection de E, déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $s((x, y)) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$.
   Montrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 16
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique. Soit F et G les sous-ensembles de définis par $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

1. Soit a un réel et ϕ_a l'application définie sur E par pour tout $P \in E$, $\phi_a(P) = P(a)$.
   (a) Montrer que ϕ_a est une forme linéaire de E.
   (b) En déduire que F, G et $F \cap G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer la dimension de F et de G.
3. On considère l'application $f : \begin{cases} E \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(0)X + P(1) \end{cases}$.
   (a) Montrer que f est linéaire et déterminer son rang. Est-elle injective, surjective, bijective ?
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f = F \cap G$ et déterminer une base de $F \cap G$.
   (c) Montrer que $E = F + G$. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts deux à deux.
On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), \ldots, P(\alpha_n)) \end{cases}$.

1. Montrer que f est linéaire et injective.
   En déduire que f est bijective. Que fait l'application f^{-1} ?
2. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\ell_i = f^{-1}(e_i)$.
   (a) Que dire de la famille $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?
   (b) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $\ell_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$.

Exercice 18
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x + 3y + z, x - y - z, 2x + 2y)$.

1. Donner des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (a) Montrer que $E_\lambda \neq \{0\}$ si et seulement si $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$.
   (b) Construire une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\varepsilon_1 \in E_0$, $\varepsilon_2 \in E_{-2}$ et $\varepsilon_3 \in E_2$.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. On pose $g = f^3 - 4f$.
   (a) Calculer $g(\varepsilon_1)$, $g(\varepsilon_2)$ et $g(\varepsilon_3)$ en complétant le tableau suivant :

x	$f(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$g(x)$
ε_1				
ε_2				
ε_3				

   Que peut-on en déduire ?
   (b) Utiliser le résultat précedent pour déterminer l'application f^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.