TD14 - MATRICES

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\2&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&-1\end{pmatrix}$$

1. Calculer lorsqu'ils ont un sens, les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2, C^2$.
2. Déterminer le rang des matrices A, B et C.

Exercice 2

Soit $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
En déterminer une base et la dimension.
F est-il stable par produit matriciel ?

Exercice 3

1. En utilisant par exemple des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vérifier qu'**en général**, pour $A, B\in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2.$$
2. Quelle(s) condition(s) peut-on imposer à deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que la formule du binôme puisse s'appliquer pour calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(A+B)^k$? Ecrire alors la formule du binôme pour ces matrices.
3. *Application* : Soit $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$
   (a) Calculer B^2. Que peut-on dire de la matrice B ?
   (b) Exprimer C à l'aide de B et calculer C^n en fonction de l'entier $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère l'application linéaire $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&0&3\\1&4&-1&-7\\2&-4&2&2\end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de la matrice A.
2. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $e_1=(2,1,-1,1)$ et $e_2=(4,-1,-7,1)$.
   Calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (d'après IE 03/2014)

Soit $n\geq 1$ un entier. Pour une matrice carrée quelconque $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le commutant de A par $\mathcal{C}_A=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM=MA\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $n=2$ **et** $A=\begin{pmatrix}3&-1\\0&3\end{pmatrix}$ **.**
2. Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque d'ordre 2. Montrer que $AM=MA$ si et seulement si M s'écrit $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}$ avec α et β deux réels.
3. (a) Soit $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque d'ordre 2. Montrer que si $B^2=A$ alors $AB=BA$ (on pourra exprimer B^3 de deux manières).
   (b) En déduire toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2=A$.
   Ces matrices sont appelées les racines carrées de la matrice A.
4. En utilisant la question 2, donner une base et la dimension du commutant de A.

Exercice 6

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images de la base $\mathcal{B}$:

$$u(e_1)=e_2-e_3\quad,\quad u(e_2)=e_3-e_1\quad,\quad u(e_3)=e_1-e_2.$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
2. Calculer A^2, A^3. Exprimer A^3 en fonction de A.
3. Déterminer la matrice A^{2n+1} puis A^{2n} pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(i,j,k)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
3. Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la somme directe $\operatorname{Im} f\oplus\ker f$?

Exercice 8

Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}2&j&j^2\\j&-j&1\\j^2&1&-j^2\end{pmatrix}$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Calculer $(M-I_3)^2$.
2. M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 9
On considère l'application linéaire $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+2y+3z, 0, -x-z) \end{cases}$.
Déterminer le rang de u par trois méthodes différentes.

Exercice 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application f définie par $f(P) = P' - P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E ; déterminer son noyau et son image.
2. Écrire M la matrice de f dans la base canonique de E. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Déterminer les solutions polynômiales des équations différentielles
$(1) : y'(x) - y(x) = x^2 + 1$ et $(2) : y'(x) - y(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Exercice 12
On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $f_2(x) = x\mathrm{e}^{2x}$, et ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(f) = f'$. Soit $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
3. En écrivant $A = 2I_2 + B$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire la dérivée n-ième de la fonction $f : x \to (3x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 13
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 14
Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e_2 = (1,\ -1,\ 0)$, $e_3 = (1,\ 1,\ 1)$,
$f_1 = (0,\ 1,\ 1)$, $f_2 = (1,\ 0,\ 1)$, $f_3 = (1,\ 1,\ 0)$.

1. Montrer que les familles $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{E}$ puis la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{F}$.
3. En déduire la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.

Exercice 15
Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 16
Soient f et g deux applications linéaires définies par $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y, 2x) \end{cases}$
et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (2y-z, x+y+z) \end{cases}$.

1. Déterminer la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dans les cas suivants :
   (a) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$
   (b) $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$
   (c) $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$
2. Déterminer l'expression analytique de $f \circ g$, puis retrouver ce résultats à l'aide d'un produit matriciel.
3. De même pour $g \circ f$.

Exercice 17
Soit E un $\mathbb{R}-$ ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. On pose $u = e_1 + e_2$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de E.
   (b) Quelle est la matrice T de f dans cette base ?
3. Calculer T^2 et T^3. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace** de A le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la dimension du sous espace $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices à trace nulle ?
3. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
En déduire qu'il n'existe pas de couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AB - BA = I_n$.
Que peut-on dire de la trace de deux matrices semblables ?
4. Montrer que si $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$ alors $A = 0$.