TD16 - DETERMINANTS

Exercice 1
Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A.
2. Calculer le déterminant de B avec les méthodes suivantes :
   (a) la règle de Sarrus
   (b) en développant selon la première ligne
   (c) en développant selon la deuxième colonne
   (d) après avoir fait des opérations sur B pour faire « apparaître des 0 ».

Exercice 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les valeurs possibles de $\det(A)$ dans les cas suivants :

1. $A^3 = 0$ 2. $A^2 = A$ 3. $A^2 = I_n$

Exercice 3
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants suivants en donnant le résultat sous la forme la plus factorisée possible :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ba & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 4
On considère le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivant : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+2} = D_n$.
En déduire la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5
Montrer qu'une matrice carré d'ordre n impair qui est antisymétrique n'est jamais inversible.

Exercice 6
Soit m un réel.

Calculer le déterminant suivant de taille $n \geq 2$: $\mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} m & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & m \end{vmatrix}$.

Exercice 7
Montrer qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_3 = 0$.
Ce résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 8
Soit $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer j^3, j^4, plus généralement j^n où $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice D diagonale telle que $AJ = JD$.
3. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ de $\det A$.

Exercice 9
Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 10
Soit un entier $n \geqslant 3$. Montrer que, pour tous réels $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$:

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 11
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} (a+b) & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$ où a et b sont deux réels distincts.

En établissant une relation de récurrence pour la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

Exercice 12

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On souhaite calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. On pose $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}$.

   Montrer que P est un polynôme de degré au plus $n-1$ puis trouver toutes ses racines.
2. En déduire la factorisation de P puis calculer $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
3. Retrouver ce résultat par un calcul direct du déterminant.

Exercice 13

On considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, a,$ et b qui sont $n+2$ nombres réels avec $a \neq b$.
On définit le déterminant suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \ldots & \ldots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \ldots & \ldots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine en x.
2. Déterminer l'expression de $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 14

Soit $\mathcal{V} = \{x \mapsto e^x P(x), P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Montrer que l'application linéaire $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{V}$ dont on calculera le déterminant.

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 dont $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base.

f est l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $\det(A - \lambda I_3)$=0 ?
2. Que peut-on en déduire sur $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ pour ces trois valeurs de λ ?
3. Déterminer une base de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Sans le résoudre, démontrer que le système suivant admet une unique solution quels que soit les nombres a, b, c et d : $\left\{\begin{array}{rcl} 3y + 4z + t & = & a \\ 3x + y + 3z + t & = & b \\ 6x + 2y + 2z + 2t & = & c \\ -6x - z - t & = & d \end{array}\right.$

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 ; $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et $m \in \mathbb{R}$.
On pose :
$u = m^2 e_1 + 2me_2 + 8e_3$, $v = -9e_1 - 3e_2 + 3me_3$ et $w = -4e_1 - 4e_2 - 8e_3$.
Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\{u, v, w\}$ forment-ils une base de E ?

Exercice 18

Soit le système linéaire $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que pour tout triplet (a, b, c) le système admet une unique solution.
2. Soit (x, y, z) le triplet solution du système précédent. Démontrer que $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 3 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \det(A)$.
3. En déduire une méthode de résolution du système utilisant le déterminant.