

**Exercice 1**

Écrire à l'aide des symboles  $\exists$  et  $\forall$  les propositions suivantes.

1. Tout réel compris entre -1 et 1 est le sinus d'un nombre réel.
2. Le nombre 3 n'est le cosinus d'aucun nombre réel.
3. L'application  $f$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 2**

Les déductions suivantes sont-elles correctes ?

1. Si (aucun lapin n'est travailleur) et (Marcel est travailleur) alors (Marcel n'est pas un lapin).
2. Si (tous les ours sont hypocrites) et (quelques ours- pas tous- sont végétariens), alors (parmi les animaux qui mangent de la viande, certains sont hypocrites).
3. Si (toute personne malhonnête a de la fièvre) et (les policiers ne sont jamais malhonnêtes) alors (les policiers n'ont pas de fièvre).

**Exercice 3**

Préciser l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \cos(x^3), \quad f_2(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_3(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 3}, \quad f_4(x) = \frac{1+x^2}{\operatorname{sh}(x)},$$

$$f_5(x) = \sin(x) \operatorname{ch}(\tan x), \quad f_6(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}, \quad f_7(x) = e^{\cos(x)}, \quad f_8(x) = e^{\sin(x)}.$$

**Exercice 4**

Tracer sans calcul l'allure de la courbe représentative des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = (x-2)^3, \quad f_2(x) = \sqrt{-x}, \quad f_3(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad f_4(x) = 3 \sin(x) \text{ sur } [0, 2\pi],$$

$$f_5(x) = \sin(2x) \text{ sur } [0, 2\pi], \quad f_6(x) = 2e^{x-3}, \quad f_7(x) = 1 + \operatorname{sh}(-x).$$

**Exercice 5**

Préciser l'ensemble de définition et déterminer les variations (sans calculer la dérivée)

des fonctions suivantes :  $f_1(x) = \ln(1 + e^{-x})$ ,  $f_2(x) = \operatorname{ch}(\ln(x-2))$ ,  
 $f_3(x) = (\operatorname{sh}(\sqrt{x+3}))^3$ ,  $f_4(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ .

**Exercice 6**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = 2|x-2| - 4|x+1| + 3|x|$ .

Donner une écriture de  $f(x)$  sans valeur absolue.

Tracer le graphe de  $f$  puis résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

**Exercice 7**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x-y, ax+y)$ .

1. On suppose  $a \neq -1$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque.
2. On suppose que  $a = -1$ . Montrer que  $f$  n'est ni injective ni surjective.

**Exercice 8**

Montrer que  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow ]4, +\infty[ \\ x \mapsto 3 + \sqrt{1 + e^{x-2}} \end{cases}$  est une bijection et déterminer sa réciproque.

**Exercice 9**

On considère les applications  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } g(x) = |f(x)|.$$

1. Montrer que  $f$  est périodique et en déterminer une période  $T > 0$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. Partant du graphe de la fonction cosinus, tracer les graphes de  $f$  et  $g$  sur  $[-T, 2T]$ .
4. Étudier la parité des applications  $h : x \mapsto f\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$  et  $l : x \mapsto f\left(x + \frac{3\pi}{8}\right)$ .

**Exercice 10**

Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+2 \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+2 \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 + 3x^2 - 5 \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases} \quad f_6 : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ z \mapsto |z| \end{cases}$$

**Exercice 11**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ .

1. Écrire le trinôme  $x^2 + x + 1$  sous forme canonique.
2. Montrer que la fonction  $g : x \mapsto f(x-1/2)$  est paire. Quelle propriété géométrique peut-on en déduire sur le graphe de  $f$  ?
3. Sans utiliser la dérivée de  $f$ , étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et tracer son graphe.
4. Déterminer graphiquement  $f(\mathbb{R})$ .
5. Soit  $y \in \mathbb{R}$  fixé. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$  suivante :  $y = f(x)$ .
6. Retrouver alors  $f(\mathbb{R})$ , puis trouver les deux intervalles maximaux  $J_1$  et  $J_2$  sur lesquels la restriction de  $f$  réalise une bijection vers  $f(\mathbb{R})$ . On écrira explicitement les bijections réciproques.

**Exercice 12**

On note  $E = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(z) = \frac{i-2z}{2+iz}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien une application de  $E$  dans  $E$ , puis calculer  $f \circ f$ .
2. En déduire que  $f$  est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

**Exercice 13**

Montrer que  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$ , définie par  $f(p, q) = 2^p(2q+1)$  est bijective.

**Exercice 14**

- Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  l'application définie par  $f(n) = 3n^2 - n + 7$ .  
Justifier que  $f$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Est-elle injective? Surjective?
- Mêmes questions pour l'application  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $g(n) = n^2 - 2n + 2$ .

**Exercice 15 (IE - 10/2013)**

Soient  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  les applications définies par :

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(k) = 2k$  et  $g(k) = \frac{k}{2}$  si  $k$  est pair et  $\frac{k-1}{2}$  si  $k$  est impair.

- Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $f$ .
- Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $g$ .
- Préciser les applications  $g \circ f$  et  $f \circ g$ . Étudier leur injectivité et leur surjectivité.

**Exercice 16**

- Simplifier les expressions suivantes :  $(\frac{1}{49})^{-3/2}$   $(\frac{1}{32})^{-0,8}$   $(\frac{32}{243})^{-2/5}$   $(\frac{27}{2\sqrt{2}})^{2/3}$
- Tracer l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes :  
 $f_1 : x \mapsto x^{0,25}$   $f_2 : x \mapsto x^{-0,7}$   $f_3 : x \mapsto x^{\sqrt{2}}$   $f_4 : x \mapsto \pi^x$   $f_5 : x \mapsto (\frac{1}{3})^x$

**Exercice 17 (Fonction tangente hyperbolique)**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ .

- Étudier la parité de  $\text{th}$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{th}(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ .  
En déduire la limite de  $\text{th}$  en  $+\infty$ , puis en  $-\infty$ . En déduire également son sens de variation sur  $\mathbb{R}$  sans utiliser la dérivée.
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$ .
- Tracer la courbe représentative de  $\text{th}$  en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et les asymptotes éventuelles en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

**Exercice 18 (Fonction partie entière)**

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique entier  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ . On note cet entier  $E(x)$ . L'application  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  est appelée « fonction partie entière ».

- Calculer  $E(5)$ ,  $E(-5)$ ,  $E(\pi)$ ,  $E(0,02)$ ,  $E(-0,02)$ ,  $E(3,8)$ ,  $E(-3,8)$ ,  $E(\frac{11}{3})$ . La fonction  $E$  est-elle impaire?
- Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Exprimer  $E(x+n)$  en fonction de  $E(x)$  et  $n$ .
- Tracer le graphe de l'application  $E$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que les applications  $f : x \mapsto x - E(x)$  et  $g : x \mapsto E(4x) - 4E(x)$  sont périodiques et tracer leur graphe sur  $[-2, 2]$ .

**Exercice 19**

On considère les fonctions  $P$  et  $Q$  définies par :  $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$  et  $Q(x) = 2x^2 - 1$ . Calculer les fonctions polynômes suivantes et donner leurs degrés respectifs :  $P + Q$ ,  $P \times Q$ ,  $P \circ Q$ ,  $Q \circ P$ ,  $x \mapsto P(x^2)$ ,  $x \mapsto (Q(x))^3$ ,  $x \mapsto Q(x+1) - Q(x)$ .

**Exercice 20 (Une courbe de Lissajous)**

Pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ , on définit dans un repère orthonormé le point  $M(t)$  de coordonnées  $(\cos(3t), \sin(2t))$ .

- Étudier la courbe paramétrée  $t \in [0, \pi/2] \mapsto M(t)$ .
- Examiner les symétries de la courbe paramétrée  $t \in [0, 2\pi] \mapsto M(t)$ ; on pourra regarder les points  $M(\pi - t)$ ,  $M(t + \pi)$ .
- Tracer alors cette courbe.

**Exercice 21 (Fonctions cosinus et sinus hyperboliques)**

- Montrer les formules suivantes : pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y),$$

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y).$$

- Exprimer  $\text{ch}(2x)$  en fonction de  $\text{ch}(x)$ , puis  $\text{sh}(2x)$  en fonction de  $\text{ch}(x)$  et  $\text{sh}(x)$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(3x) = P(\text{ch}(x))$  où  $P$  est une fonction polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

**Exercice 22**

Déterminer une fonction polynôme  $P$  de degré 3 telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(x-1) = x^2$ . En déduire la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^n k^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 23**

Soit  $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  et  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . On considère l'application  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .

- Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ,  $1 - |f(z)|^2 = \frac{4\text{Im}(z)}{|z+i|^2}$ . En déduire que  $f(H) \subset D$  et  $f(\mathbb{C} \setminus (H \cup \{-i\})) \subset \mathbb{C} \setminus D$ .
- Soit  $w \in D$ . Montrer qu'il existe un unique  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$  tel que  $f(z) = w$ . Montrer que  $z \in H$ .
- En déduire que  $f$  réalise une bijection de  $H$  sur  $D$ , puis donner l'expression de sa bijection réciproque.

**Exercice 24 (L'astroïde)**

Pour chaque  $t \in [0, 2\pi]$ , on définit dans un repère orthonormé les points  $P(t)$ ,  $Q(t)$  et  $m(t)$  de coordonnées respectives  $(\cos t, 0)$ ,  $(0, \sin t)$  et  $(\cos t, \sin t)$ . On construit le point  $M(t)$  pied de la hauteur du triangle  $P(t)Q(t)m(t)$  issue de  $m(t)$ .

- Montrer que les coordonnées du point  $M(t)$  sont données par  $(\cos^3 t, \sin^3 t)$ .
- Étudier la courbe paramétrée  $t \in [0, \pi/2] \mapsto M(t)$ , puis examiner les symétries de la courbe paramétrée  $t \in [0, 2\pi] \mapsto M(t)$ ; on pourra regarder les points  $M(\pi - t)$ ,  $M(t + \pi)$ . Tracer alors cette courbe (il s'agit d'une *astroïde*, hypocycloïde à 4 points de rebroussements).