TD 2 - LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1
On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{N}$	$C = \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$
$\mathbb{Q}$	$D = \left\{1 + 4\cos^2(x),\ x \in \mathbb{R}\right\}$
$A = [0, \mathrm{e}[$	$E = \left\{\mathrm{e}^{-4x} + 3,\ x \in \mathbb{R}\right\}$
$B =]-8, -\ln(2)[\cup \left[-\frac{1}{3}, 3\right]$	$F = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Pour chaque partie, dire si elle est minorée, majorée et bornée.
Préciser, quand ces nombres existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément de chaque partie.

Exercice 2
IE 11/2008 – Question préliminaire :
Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Prouver l'inégalité $\sup(A) \leq \sup(B)$.
On considère une application majorée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Justifier l'existence, pour tout $x \in [0,1]$, de la borne supérieure de l'ensemble $\{f(z), z \in [0,x]\}$.
   On définit alors l'application $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in [0,1], g(x) = \sup\{f(z), z \in [0,x]\} = \sup_{z\in[0,x]} f(z).$$
2. Montrer que l'application g est croissante.
3. Simplifier l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ lorsque f est croissante.
4. **Exemple** : on choisit f définie par : $\forall x \in [0,1], f(x) = \sin(\pi x)$.
   Donner le tableau de variation de f sur $[0,1]$ puis déterminer $g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
   Tracer le graphe de g.

Exercice 3
IE 11/2009 – Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, contenue dans l'intervalle $]2,3[$.

1. Justifier l'existence de $\lambda = \sup(A)$ et $\mu = \inf(A)$.
   Montrer que $\lambda \leq 3$ et $\mu \geq 2$.
2. Soit $B = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in A\right\}$.
   Montrer que B est une partie bornée de $\mathbb{R}$, puis que $\inf(B) = \frac{1}{\lambda}$.

Exercice 4
On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$f_1 : x \longmapsto \begin{cases} 1 + \sin(x-2) & \text{si } x \geqslant 2 \\ \sqrt{-x+3} & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Montrer que f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et que f_2 n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 5
Calculer les limites suivantes :

1. $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0
2. $\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x$ en $+\infty$
3. $\mathrm{sh}(x)\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$, en $-\infty$
4. $\ln(x) + 3\cos\left(\frac{5}{x^2}\right)$ en 0^+
5. $\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$ en $+\infty$, en 1
6. $\frac{\mathrm{sh}(x)-5x}{\mathrm{ch}(x)+3\ln(x)}$ en $+\infty$
7. $x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$
8. $\frac{x\sin(7x)}{1-\cos x}$ en 0
9. $x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$
10. $\frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ en $\frac{\pi}{4}$
11. x^{x^2} en 0.

Exercice 6
Pour chacune des fonctions suivantes, étudier si la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$, une asymptote, et si oui, étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = 3x + 2 + \ln(|x|)$;
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} - 7x + 3 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$;
3. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - x$.

Exercice 7
On pose $f(x) = \mathrm{e}^{1/(2x-8)}$, $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $h(x) = \frac{\sin(2x)}{|3x|}$.
Montrer que f, g et h sont continues sur leurs domaines de définition, puis étudier si elles sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin x$.

1. Déterminer une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$.
2. Déterminer une suite (y_n) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(y_n))$ tende vers $+\infty$.
3. L'application f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 9
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application continue. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$. (On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$.)

Exercice 10
Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 11
On considère l'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$.
Combien de solutions réelles admet-elle ?

Exercice 12
Soient f et g deux applications continues sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) telles que :

$$\forall x \in [a,b], 0 < g(x) < f(x).$$

Montrer qu'il existe un réel $k > 1$ tel que : $\forall x \in [a,b], f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 13
Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.
Montrer que f est bornée sur $[a,+\infty[$.

Exercice 14
Pour tout entier $n > 2$ on pose : $P_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que le polynôme P_n admet une unique racine dans $[0,1]$, que l'on notera u_n.
2. Trouver des relations d'inégalité entre u_n, $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$.
3. Trouver la limite de (u_n) puis celle de (nu_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 15
Une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 16
Montrer que chacune des applications suivantes est une bijection entre des parties I et J de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera, donner l'allure de son graphe et déterminer sa réciproque.

1. $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-2x+4}$
2. $g : x \mapsto 5 - \sqrt{x-1}$
3. $h : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \in [1;4] \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Exercice 17
Calculer :
$\arctan(1)$, $\arctan(-\sqrt{3})$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\sin(\arcsin(-0,2))$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)\right)$, $\tan(\arctan(10))$, $\arctan(\tan(10))$.

Exercice 18
Soit f l'application définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.

1. Étudier les variations de f, puis montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. (On ne cherchera pas à calculer explicitement f^{-1} dans cette question).
   Quel est le sens de variation de f^{-1} ?
2. Tracer les graphes de f et f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé.
3. Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $f^{-1}(2)$.
4. Déterminer graphiquement l'ensemble des points de J où f^{-1} est dérivable.
5. Pour tout $y \in J$, calculer explicitement $f^{-1}(y)$.

Exercice 19
Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(x) = -\frac{1}{5}$, sur $[0, 2\pi]$.
2. $\dfrac{\cos(3x)+2}{\cos(3x)-2} = -2$, sur $\mathbb{R}$.
3. $\tan(x) + 1 = \dfrac{6}{\tan(x)}$, sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 20
Donner les représentations graphiques des fonctions définies par les formules suivantes (il pourra être utile d'examiner d'abord si f est périodique, paire, impaire, etc.) :

1. $f(x) = \arccos(\cos(x))$,
2. $f(x) = \cos(\arccos(x))$,
3. $f(x) = \arcsin(\sin(x))$,
4. $f(x) = \arctan(\tan(x))$.

Exercice 21

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1;1]$, on a : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Calculer $\cos(\arctan(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\tan(\arcsin(x))$ pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 22
On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f, puis étudier la parité de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D.
3. Déterminer les variations de f sur D.